2027학년도 / 수리논술

한양대

의예 지원자용 자연계 심화

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

기본 1회 · 1번 사차곡선의 공통접선·접선 개수·넓이

BlueMath 신규 창작 · 공식 문항의 전재 또는 수치변형 아님

회당 90분 · 2대문항 · 100점. 이 대문항은 소문항 3개, 학습용 50점이다. 대학 공식 문항 또는 공식 배점이 아니다.

함수 $f(x)=x^4-2x^2$의 그래프를 C라 하자. 접점이 달라도 직선의 방정식이 같으면 하나의 접선으로 센다.

1. 서로 다른 두 점에서 C에 동시에 접하는 직선을 모두 구하시오.
2. 점 $(0,b)$를 지나는 C의 서로 다른 접선의 개수를 실수 b의 값에 따라 구하시오.
3. $b=\frac{1}{3}$일 때의 두 접선을 ℓ_1,ℓ_2라 하자. 두 접점 사이에서 C와 두 접선의 아래쪽 부분으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

첫 판단 → 조건의 식 변환 → 계산·논증 → 성립 여부 확인

기본 1회 · 2번 정팔각형의 삼각형 분류·조건부기댓값·분산

BlueMath 신규 창작 · 공식 문항의 전재 또는 수치변형 아님

회당 90분 · 2대문항 · 100점. 이 대문항은 소문항 3개, 학습용 50점이다. 대학 공식 문항 또는 공식 배점이 아니다.

반지름이 1인 원에 내접하는 정팔각형의 꼭짓점 중 서로 다른 세 개를 같은 가능성으로 골라 삼각형을 만든다. 그 넓이를 확률변수 X라 하자.

1. 예각삼각형, 직각삼각형, 둔각삼각형이 되는 경우의 수를 각각 구하시오.
2. X의 확률분포와 $E(X)$를 구하시오.
3. 선택한 삼각형이 직각삼각형이 아니라는 조건 아래 X의 기댓값과 분산을 구하시오.

첫 판단 → 조건의 식 변환 → 계산·논증 → 성립 여부 확인

기본 1회 · 1번 사차곡선의 공통접선·접선 개수·넓이

BlueMath 신규 창작 · 공식 문항의 전재 또는 수치변형 아님

회당 90분 · 2대문항 · 100점. 이 대문항은 소문항 3개, 학습용 50점이다. 대학 공식 문항 또는 공식 배점이 아니다.

상세해설 · 발상과 중간 계산

[1] 공통접선은 접점 조건 두 개가 아니라 중근 구조로 찾는다.

직선 $y=mx+b$가 서로 다른 u, v에서 접하면 다항식 $f(x)-mx-b$는 u, v를 각각 중근으로 갖는다. 최고차항 계수가 1이고 차수가 4이므로

$$x^4-2x^2-mx-b=(x-u)^2(x-v)^2.$$

x^3의 계수를 비교하면 $u+v=0$이다. 따라서 우변은 $(x^2-u^2)^2$이고, x^2의 계수를 비교하면 $u^2=1$이다. 나머지 계수에서 $m=0, b=-1$을 얻는다. 실제로 $f(x)+1=(x^2-1)^2$이므로 $y=-1$은 $x=\pm1$에서 접한다. 이것이 유일하다.

[2] 접점의 개수와 직선의 개수를 마지막에 구별한다.

$x=t$에서의 접선은

$$y=(4t^3-4t)x+(2t^2-3t^4).$$

$(0, b)$를 지날 조건은 $2t^2-3t^4=b$이다. $z=t^2\geq0$으로 놓으면 $-3z^2+2z=b$. 이 포물선은 $z=\frac{1}{3}$에서 최댓값 $\frac{1}{3}$을 가지며, $z=0, \frac{2}{3}$에서 0이다.

- $b>\frac{1}{3}$: 가능한 z가 없으므로 0개.
- $b=\frac{1}{3}$: 양의 z가 하나이고 $t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$이므로 2개.
- $0<b<\frac{1}{3}$: 서로 다른 양의 z가 두 개이므로 접점은 4개.
- $b=0$: $z=0, \frac{2}{3}$이므로 접점은 3개.
- $b<0$: 양의 z가 하나이므로 접점은 2개.

[1]에 의해 서로 다른 접점이 같은 직선을 만드는 경우는 $b=-1$뿐이다. 그러므로 마지막 경우에서 $b=-1$일 때만 1개로 고쳐야 한다. 나머지는 모두 접점 수와 접선 수가 같다.

[3] 위쪽 경계는 두 접선 중 작은 함수값이다.

$a=\frac{1}{\sqrt{3}}$으로 놓으면 접선은 $y=\frac{1}{3}\pm\frac{8}{3\sqrt{3}}x$이다. $0\leq x\leq a$에서는 음의 기울기인 직선이 아래쪽이다. 접선과 곡선의 차는 이 구간에서 음수가 아니며, 예를 들어

$$f(x)-\left(\frac{1}{3}-\frac{8x}{3\sqrt{3}}\right)=(x-a)^3(x+3a)\leq0$$

으로 확인할 수 있다. 따라서 대칭성을 이용하면 넓이는

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{3}-\frac{8x}{3\sqrt{3}}-x^4+2x^2\right)dx=\frac{8\sqrt{3}}{135}.$$

적분구간을 두 접점 사이로 제한한 것은 다른 곳에서 생길 수 있는 교점을 이 도형에 포함하지 않기 위해서이다.

시험용 모범답안

$f(x)-mx-b=(x-u)^2(x-v)^2$에서 계수를 비교하면 $v=-u$, $u^2=1$, $m=0$, $b=-1$이다. 따라서 공통접선은 $y=-1$이다. 일반 접선의 절편은 $2t^2-3t^4$이다. $z=t^2\ge 0$에서 $-3z^2+2z=b$의 양의 근 하나는 접점 두 개를, $z=0$은 접점 한 개를 준다. 서로 다른 접점의 직선이 겹치는 경우는 $b=-1$뿐이다. 따라서 접선 수는

$$\begin{cases} 0 & b>\frac{1}{3},\\ 2 & b=\frac{1}{3},\\ 4 & 0<b<\frac{1}{3},\\ 3 & b=0,\\ 2 & b<0,\ b\neq -1,\\ 1 & b=-1. \end{cases}$$

$b=\frac{1}{3}$의 두 접선은 $y=\frac{1}{3}\pm\frac{8x}{3\sqrt{3}}$이다. 양의 접점까지에서는 음의 기울기인 직선이 아래쪽이고 곡선 위에 있으므로, 대칭을 이용한 넓이는

$$2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{3}-\frac{8x}{3\sqrt{3}}-x^4+2x^2\right)dx=\frac{8\sqrt{3}}{135}.$$

최종 결론 [1] $y=-1$. [2] $b>\frac{1}{3}$: 0개; $b=\frac{1}{3}$: 2개; $0<b<\frac{1}{3}$: 4개; $b=0$: 3개; $b<0,\ b\neq -1$: 2개; $b=-1$: 1개. [3] $\frac{8\sqrt{3}}{135}$.

오류 점검

- t와 $-t$가 항상 다른 접선을 만드는 것은 아니다. $b=-1$을 따로 확인했는가?
- $z=t^2$의 범위 $z\ge 0$를 유지했는가?

3 에서 두 직선의 위쪽이 아니라 아래쪽을 경계로 적분했는가?

학습용 채점 기준

학습용 평가 기준(대학 공식 채점표 아님, 총 50점)

[1] 중근 인수분해 8점, 계수 비교와 유일성 8점. [2] $z\ge 0$에서 절편식 분석 8점, 모든 경계값 및 직선 중복 처리 8점. [3] 경계·부호 설명 8점, 정확한 적분 및 결과 10점.

기본 1회 · 2번 정팔각형의 삼각형 분류·조건부기댓값·분산

BlueMath 신규 창작 · 공식 문항의 전재 또는 수치변형 아님

회당 90분 · 2대문항 · 100점. 이 대문항은 소문항 3개, 학습용 50점이다. 대학 공식 문항 또는 공식 배점이 아니다.

상세해설 · 발상과 중간 계산

[1] 세 호의 칸 수로 중복 없이 분류한다.

세 꼭짓점을 원주를 따라 만나며 지나가는 세 호의 칸 수를 p, q, r라 하면 양의 정수이고 $p+q+r=8$이다. 순서를 무시한 가능한 분할은

$$(1,1,6),\ (1,2,5),\ (1,3,4),\ (2,2,4),\ (2,3,3).$$

원주각의 크기는 각각 $\frac{p\pi}{8}, \frac{q\pi}{8}, \frac{r\pi}{8}$이다. 따라서 가장 큰 칸 수가 4보다 작으면 예각, 4이면 직각, 4보다 크면 둔각이다. 세 칸 수가 모두 다르면 시작 꼭짓점 8개와 순서 6개를 선택한 뒤 같은 삼각형을 시작점 3개에서 센 중복을 나누어 $8\times\frac{6}{3}=16$개이다. 두 수가 같으면 순서가 3개이므로 $8\times\frac{3}{3}=8$개이다. 이 방법으로 다섯 유형의 개수는 차례로 $8, 16, 16, 8, 8$이다. 합이 $56={}_8\mathrm{C}_3$이므로 누락이 없다. 예각은 8개, 직각은 $16+8=24$개, 둔각은 $8+16=24$개이다.

[2] 중심각이 큰 경우에도 부호를 유지한다.

원의 중심이 삼각형 내부에 있으면 중심과 각 변이 만드는 세 삼각형의 넓이를 더하고, 외부에 있으면 겹친 넓이를 빼면 된다. 이를 큰 중심각의 사인이 음수인 성질로 통일하여 쓰면

$$X=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{p\pi}{4}+\sin\frac{q\pi}{4}+\sin\frac{r\pi}{4}\right).$$

큰 호에 대응하는 사인값이 음수일 수도 있으며 이 부호를 그대로 써야 한다. 다섯 유형에 대응하는 넓이는 차례로

$$\frac{\sqrt{2}-1}{2},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{\sqrt{2}}{2},\quad 1,\quad \frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

각 확률은 차례로 $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, \frac{1}{7}$이다. 따라서

$$E(X)=\frac{1}{7}\frac{\sqrt{2}-1}{2}+\frac{2}{7}\frac{1}{2}+\frac{2}{7}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}\frac{\sqrt{2}+1}{2}=\frac{2(1+\sqrt{2})}{7}.$$

[3] 조건을 건 뒤 표본공간과 확률을 다시 정한다.

직각이 아닌 삼각형은 32개이다. 남는 유형은 $(1,1,6),(1,2,5),(2,3,3)$이며 조건부확률은 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$이다. 따라서

$$E(X\mid \text{직각 아님})=\frac{1+\sqrt{2}}{4},$$

$$E(X^2\mid \text{직각 아님})=\frac{1}{4}\frac{3-2\sqrt{2}}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{3+2\sqrt{2}}{4}=\frac{1}{2}.$$

분산은 조건부 X^2의 기댓값에서 조건부 평균의 제곱을 빼므로

$$V(X\mid \text{직각 아님})=\frac{1}{2}-\left(\frac{1+\sqrt{2}}{4}\right)^2=\frac{5-2\sqrt{2}}{16}.$$

시험용 모범답안

호의 칸 수 분할 $(1,1,6),(1,2,5),(1,3,4),(2,2,4),(2,3,3)$의 개수는 $8,16,16,8,8$이다. 가장 큰 칸 수와 4를 비교하면 예각·직각·둔각은 $8,24,24$개이다. 각 넓이는 $\frac{(\sqrt{2}-1)}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$이고 각각의 확률은 $\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}$이다. 값과 확률의 곱을 더하면 평균은 $\frac{2(1+\sqrt{2})}{7}$이다. 직각을 제외하면 첫째·둘째·다섯째 유형의 확률이 $\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}$가 되어 조건부 평균은 $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$, 조건부 X^2의 기댓값은 $\frac{1}{2}$, 분산은 $\frac{(5-2\sqrt{2})}{16}$이다.

최종 결론 [1] 예각 8개, 직각 24개, 둔각 24개. [2] 넓이 $\frac{(\sqrt{2}-1)}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},1,\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$의 확률은 $\frac{1}{7},\frac{2}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7},\frac{1}{7}$; $E(X)=\frac{2(1+\sqrt{2})}{7}$. [3] 평균 $\frac{(1+\sqrt{2})}{4}$, 분산 $\frac{(5-2\sqrt{2})}{16}$.

오류 점검

- 원주상 시작점을 세 번 센 중복을 제거했는가?
- 둔각삼각형에서 큰 중심각의 사인에 절댓값을 붙이지 않았는가?
- 조건부 분산에 무조건부 평균을 사용하지 않았는가?

학습용 채점 기준

학습용 평가 기준(대학 공식 채점표 아님, 총 50점)

[1] 다섯 호 유형의 완전분류 8점, 개수와 각 분류 8점. [2] 넓이 계산 8점, 확률분포와 기댓값 8점. [3] 조건부 표본공간 6점, 조건부 평균·X^2의 기댓값 6점, 분산 6점.