2027학년도 / 수리논술

한양대

상경 수학영역

최종점검
FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

BLUE MATH

한양대학교 서울

상경계열 수학 최종점검5

제1회 · 문제편

수학 독립 3대문항 · 9소문항 · 연습 시간 50분

수학만 별도로 연습하는 구성입니다. 인문논술은 포함하지 않습니다.

실제 상경 시험은 인문1문항과 수리1문항(소문항2 3개), 총90분입니다.

공식 기출을 그대로 재수록한 자료가 아닌 자체 제작 연습 문제입니다.

이름: _____ 시행일: _____

조건을 식으로 바꾸는 이유, 경우 구분, 경계와 등호 조건을 함께 씁니다. 문제편과 해설·빠른 정답은 분리하여 사용하세요. 학생 실제 풀이 시간과 난도는 실측하지 않았습니다.

최민구 · BlueMath

2027학년도 수리논술 대비

제1회 · 논제 1 · 작은 수와 큰 수의 조건부 분포

숫자 $1, 2, 3, 4, 5$가 하나씩 적힌 카드에서 서로 다른 두 장을 동시에 뽑는다. 모든 두 장의 조합은 같은 확률이다. 작은 수를 X, 큰 수를 Y라 한다.

[1-1] 풀이

$E(X), E(Y), E(XY)$를 구하고 $E(XY) - E(X)E(Y)$를 계산하시오.

[1-2] 풀이

$X + Y = 6$이라는 조건 아래에서 X의 확률분포, 평균, 분산을 구하시오.

풀이·검산 공간

제1회 · 논제 1 · 작은 수와 큰 수의 조건부 분포

앞 쪽에서 정의한 조건을 그대로 사용한다.

[1-3] 풀이

$Y \geq 2X$일 확률을 구하시오.

풀이·검산 공간

제1회 · 논제 2 · 엄격한 증가와 역함수의 대칭

실수 a에 대하여 $f_a(x) = x^3 - 3x^2 + ax\ (0 \le x \le 2)$라 한다. 엄격히 증가한다는 것은 $x_1 < x_2$이면 $f_a(x_1) < f_a(x_2)$라는 뜻이다.

[2-1] 풀이

f_a가 주어진 구간에서 엄격히 증가하기 위한 a의 범위를 구하시오.

[2-2] 풀이

$a = 4$일 때 역함수를 g라 하자. g의 정의역을 정하고 $g(4 - y) = 2 - g(y)$를 증명하시오.

풀이·검산 공간

제1회 · 논제 2 · 엄격한 증가와 역함수의 대칭

앞 쪽에서 정의한 조건을 그대로 사용한다.

[2-3] 풀이

$g'(2)$와 $\displaystyle\int_0^4 g(y)\,dy$를 구하시오.

풀이·검산 공간

제1회 · 논제 3 · 두 항의 가중 로그를 가장 크게 하는 배분

$b > 0$일 때 $F_b(x) = \ln(1+x) + 2\ln(1+b-x)$ $(0 \le x \le b)$라 한다.

[3-1] 풀이

b에 따라 F_b가 최댓값을 갖는 x를 구하고 그 유일성을 설명하시오.

[3-2] 풀이

$b = 6$일 때 최댓값을 구하시오.

풀이·검산 공간

제1회 · 논제 3 · 두 항의 가중 로그를 가장 크게 하는 배분

앞 쪽에서 정의한 조건을 그대로 사용한다.

[3-3] 풀이

$F_6(x) = \ln 49$의 해를 모두 구하시오.

풀이·검산 공간

BLUE MATH

한양대학교 서울

상경계열 수학 최종점검5

제1회 · 상세해설

수학 독립 3대문항 · 9소문항 · 연습 시간 50분

수학만 별도로 연습하는 구성입니다. 인문논술은 포함하지 않습니다.

실제 상경 시험은 인문1문항과 수리1문항(소문항2 3개), 총90분입니다.

공식 기출을 그대로 재수록한 자료가 아닌 자체 제작 연습 문제입니다.

이름: _____ 시행일: _____

조건을 식으로 바꾸는 이유, 경우 구분, 경계와 등호 조건을 함께 씁니다. 문제편과 해설·빠른 정답은 분리하여 사용하세요. 학생 실제 풀이 시간과 난도는 실측하지 않았습니다.

최민구 · BlueMath

2027학년도 수리논술 대비

제1회 · 논제 1 · 작은 수와 큰 수의 조건부 분포

[1-1] 해설

정답 $2, 4, \dfrac{17}{2}$, 차이는 $\dfrac{1}{2}$.

가능한 쌍 (X, Y)는 $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5), (4,5)$의 10개이고 각각 확률 $1/10$이다. 작은 수의 합은 $4 + 6 + 6 + 4 = 20$, 큰 수의 합은 $2 + 6 + 12 + 20 = 40$이다. 곱의 합은 $14 + 24 + 27 + 20 = 85$이다. 따라서 세 평균은 $2, 4, 85/10 = 17/2$이고, 요구한 차이는 $17/2 - 8 = 1/2$이다.

[1-2] 해설

정답 $P(X = 1 \mid X + Y = 6) = P(X = 2 \mid X + Y = 6) = \dfrac{1}{2}$, 평균 $\dfrac{3}{2}$, 분산 $\dfrac{1}{4}$.

조건을 만족하는 쌍은 $(1,5), (2,4)$뿐이다. 원래 확률이 같으므로 조건부 확률도 각각 $1/2$이다. 평균은 $(1 + 2)/2 = 3/2$, 제곱의 평균은 $(1 + 4)/2 = 5/2$이다. 따라서 분산은 $5/2 - (3/2)^2 = 1/4$이다.

제1회 · 논제 1 · 작은 수와 큰 수의 조건부 분포

[1-3] 해설

정답 $\frac{3}{5}$.

$X=1$이면 $Y=2,3,4,5$가 모두 가능하다. $X=2$이면 $Y=4,5$ 두 경우이고, $X\ge 3$이면 $Y\le 5<2X$이므로 불가능하다. 유리한 쌍은 $4+2=6$개이므로 확률은 $6/10=3/5$이다.

확인할 점 작은 수와 큰 수는 독립이 아니다. 조건을 준 뒤에는 전체 10개가 아니라 조건을 만족하는 두 경우로 표본공간을 줄인다.

제1회 · 논제 2 · 엄격한 증가와 역함수의 대칭

[2-1] 해설

정답 $a \geq 3$.

$f_a'(x) = 3(x-1)^2 + a - 3$이다. $a > 3$이면 도함수가 양수이다. $a = 3$이면 도함수는 $x = 1$에서만 0이고 나머지에서 양수이다. 어느 두 점 사이에서도 도함수의 적분은 양수이므로 함수는 엄격히 증가한다. 반대로 $a < 3$이면 $x = 1$의 작은 근방에서 도함수가 음수이므로 그 근방에서 감소한다. 따라서 필요충분조건은 $a \geq 3$이다.

[2-2] 해설

정답 정의역 $[0, 4]$, 모든 $y \in [0, 4]$에서 성립.

$f_4(0) = 0, f_4(2) = 4$이고 연속이며 엄격히 증가하므로 치역은 $[0, 4]$이며 이것이 g의 정의역이다. 직접 전개하면 $f_4(2 - x) = 4 - f_4(x)$이다. $x = g(y)$를 대입하면 $f_4(2 - g(y)) = 4 - y$. $2 - g(y) \in [0, 2]$이므로 역함수의 유일성에 의하여 $g(4 - y) = 2 - g(y)$이다.

제1회 · 논제 2 · 엄격한 증가와 역함수의 대칭

[2-3] 해설

정답 $g'(2)=1$, 적분 4.

$f_4(1)=2$, $f_4'(1)=1$이므로 역함수 미분법으로 $g'(2)=1/f_4'(1)=1$이다. 적분값을 I라 하면 치환 $u=4-y$로 $I=\int_0^4 g(4-u)\,du=\int_0^4(2-g(u))\,du=8-I$이다. 따라서 $I=4$이다.

확인할 점 엄격한 증가에 모든 점에서 도함수 양수가 필요한 것은 아니다. 역함수 식은 정의역과 치역을 정한 다음 사용한다.

제1회 · 논제 3 · 두 항의 가중 로그를 가장 크게 하는 배분

[3-1] 해설

정답 $0 < b \le 1$이면 $x = 0$, $b > 1$이면 $x = \dfrac{b-1}{3}$.

구간에서 두 로그의 진수는 모두 양수이다. 미분하면 $F_b'(x) = \frac{b-1-3x}{(1+x)(1+b-x)}$이므로 부호는 분자의 부호와 같다. $b \le 1$이면 내부에서 음수여서 최대는 왼쪽 끝점 0에서만 얻는다. $b > 1$이면 $c = (b-1)/3$이 $0 < c < b$를 만족하고, 도함수 부호가 c를 기준으로 양수에서 음수로 바뀐다. 따라서 c에서만 최대이다.

[3-2] 해설

정답 $\ln \dfrac{2048}{27}$, $x = \dfrac{5}{3}$.

$b = 6$이면 최댓값을 갖는 점은 $5/3$이다. 이때 $1 + x = 8/3$, $7 - x = 16/3$이므로 $F_6(5/3) = \ln\{(8/3)(16/3)^2\} = \ln(2048/27)$이다.

제1회 · 논제 3 · 두 항의 가중 로그를 가장 크게 하는 배분

[3-3] 해설

정답 $x=0,\ \dfrac{13-\sqrt{29}}{2}$.

로그의 일대일 대응과 양수 조건을 이용하면 $(1+x)(7-x)^2=49$이다. 전개하고 정리하면 $x(x^2-13x+35)=0$이므로 대수적 후보는 $0, (13-\sqrt{29})/2, (13+\sqrt{29})/2$이다. 마지막 후보는 6보다 크므로 제외한다. $5<\sqrt{29}<6$에서 작은 양의 후보는 0과 6 사이이다. 남은 두 후보는 원래 로그식에 대입하여 성립하므로 정답이다.

확인할 점 미분으로 얻은 후보가 구간 밖에 있을 수 있다. 로그식을 다항식으로 바꾼 뒤에도 처음 정한 구간을 반드시 적용한다.