2027학년도 / 수리논술

중앙대

일반형 자연

최종점검 FINAL 10

맛보기 / 제04회

실제 수록 회차의 문제와 정답·해설

2027학년도 중앙대학교 일반형

파이널 모의논술

기본2 · 2회 · 이공계열

문제편

시험시간 120분 **표시배점** 100점

출제범위 수학 · 수학 I · 수학 II · 확률과 통계 · 미적분

구분	구성
문제 1	확률과 통계 · 20점
문제 2	연결 소문항 2개 · 12점 + 8점
문제 3	독립 소문항 2개 · 15점 + 15점
문제 4	독립 소문항 2개 · 15점 + 15점

응시 안내

조건을 해석한 근거, 식을 세운 과정, 계산과 결론을 함께 서술하십시오.

한 소문항 안의 (a), (b), (c)는 연결될 수 있습니다. 문제 3·4의 두 소문항과 의약학 문제 5의 두 소문항은 각각 독립입니다.

계산기는 사용하지 않습니다. 답안지는 문제편 뒤에 있습니다.

이름 _____ **응시일** _____

창의형 선별 문항에 확률과 통계를 추가하여 일반형 배치로 재편한 BlueMath 자체 모의자료입니다.

문제 1

20점

서로 다른 남학생 4명과 서로 다른 여학생 3명을 일렬로 임의로 세운다. 모든 배열은 같은 확률로 선택된다. 어떤 두 여학생도 이웃하지 않는 사건을 A, 양 끝에 모두 남학생이 서는 사건을 B라 하자. 맨 왼쪽 여학생보다 왼쪽에 서 있는 남학생 수를 X라 할 때,

$$\mathrm{P}(A), \qquad \mathrm{P}(B \mid A), \qquad \mathrm{E}(X \mid A)$$

를 구하시오. 사람의 순서와 여학생을 넣는 자리의 선택을 구별하여 설명하시오.

여기서 $\mathrm{E}(X \mid A)$는 사건 A를 조건으로 정한 X의 확률분포에서 계산한 평균을 뜻한다.

문제 2

20점

제1사분면에 있는 곡선 $(x^2+y^2)^2=8xy$에 대하여 다음에 답하시오.

[2-1] 12점

접선의 기울기가 1인 모든 점의 좌표와 그 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

[2-2] 8점

곡선 위의 점 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값과 그 값을 갖는 점을 구하시오.

문제 3

30점

[3-1]

15점

닫힌구간 $[-1, 1]$에서

$$G(x) = \max\{(x-1)^2,\ 2-x^2,\ (x+1)^2\}$$

라 하자. $G(x)$를 구간별 식으로 나타내고, 열린구간 $(-1, 1)$에서 G가 미분가능하지 않은 점을 모두 구하시오. 이어서 정적분 $\displaystyle\int_{-1}^{1} G(x)\,dx$를 구하시오.

[3-2]

15점

연속함수 f가 모든 실수 x에 대하여

$$\{f(x) - x^2 + 1\}\{f(x) - 2x + 1\} = 0$$

을 만족하고

$$f(-1) = 0, \qquad f(1) = 1, \qquad f(3) = 8$$

이다. $f(x)$를 구간별 식으로 나타내시오. 이어서 $H(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} f(t)\,dt$의 극값과 그 극값을 갖는 x를 모두 구하시오.

문제 4

30점

[4-1]

15점

함수 f가 다음 조건을 만족한다.

- 모든 실수 x, y에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y+1) + 1$이다.
- 0에 가까운 모든 실수 x에 대하여 $|f(x)+1| \le x^2$이다.

(a) $f(0)$, $f'(0)$을 구하시오.

(b) 모든 실수에서 f가 미분가능함을 보이고, $f(x)$와 $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f'(k)$를 구하시오.

[4-2]

15점

$x \ge 0$에서 $F(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$라 하자.

(a) 모든 $x \ge 0$에 대하여 $\dfrac{x^3}{6} \le F(x) \le \dfrac{e^x x^3}{6}$임을 보이시오.

(b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^3 \int_0^1 \left(e^{\frac{t}{n}} - 1 - \frac{t}{n} - \frac{t^2}{2n^2} \right) dt$를 구하시오.

문제 1 답안

20점

소문항 1의 번호를 표시하여 서술하십시오.

문제 2 답안

20점

소문항 2-1 · 2-2의 번호를 표시하여 서술하십시오.

문제 3 답안

30점

소문항 3-1 · 3-2의 번호를 표시하여 서술하십시오.

문제 4 답안

30점

소문항 4-1 · 4-2의 번호를 표시하여 서술하십시오.

2027학년도 중앙대학교 일반형

파이널 모의논술

기본2 · 2회 · 이공계열

상세해설편

시험시간 120분 **표시배점** 100점

출제범위 수학 · 수학 I · 수학 II · 확률과 통계 · 미적분

구분	구성
문제 1	확률과 통계 · 20점
문제 2	연결 소문항 2개 · 12점 + 8점
문제 3	독립 소문항 2개 · 15점 + 15점
문제 4	독립 소문항 2개 · 15점 + 15점

해설 읽는 순서

정답을 확인한 뒤, 풀이의 출발점과 조건을 쓰는 순서를 읽으십시오. 상세해설을 따라 계산하고 제출용 모범답안을 자신의 말로 다시 작성합니다.

빠른 풀이와 약점 점검으로 계산을 줄이는 이유와 놓치기 쉬운 조건을 확인합니다. 채점 기준의 합은 각 소문항의 표시배점과 같습니다.

창의형 선별 문항에 확률과 통계를 추가하여 일반형 배치로 재편한 BlueMath 자체 모의자료입니다.

정답 모아보기

문제 1 · 20점

$\mathsf{P}(A) = \dfrac{2}{7}$

$\mathsf{P}(B \mid A) = \dfrac{1}{10}$

$\mathsf{E}(X \mid A) = \dfrac{1}{2}$

문제 2 · 20점

$\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$y = x \pm 1$

$\max(x+y) = 2\sqrt{2},\ (x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$

문제 3-1 · 15점

$x = \pm\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$\displaystyle\int_{-1}^{1} G(x)\,dx = \frac{10}{3} + \sqrt{3}$

문제 3-2 · 15점

$H(-1) = \dfrac{2}{3}$ 극대

$H(\frac{1}{2}) = -\dfrac{1}{4}$ 극소

문제 4-1 · 15점

$f(0) = -1,\ f\prime(0) = 0,\ f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} - 1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f\prime(k) = 440$

문제 4-2 · 15점

$(b)\ \dfrac{1}{24}$

문제 1 상세해설

20점

인접 금지 배열에서 조건부확률과 평균

풀이의 출발점
남학생을 먼저 세우면 여학생을 넣을 수 있는 자리는 양 끝까지 포함하여 5곳입니다. 이 중 서로 다른 3곳을 고르면 여학생들이 이웃하지 않습니다.

1. 조건 A를 만족하는 배열을 센다

남학생의 순서는 $4!$가지입니다. 여학생의 자리는 5곳 중 3곳을 고르는 ${}_5\mathrm{C}_3$가지이고, 선택한 자리에 여학생을 세우는 순서는 $3!$가지입니다.



주황색 자리 5곳 중 서로 다른 3곳에 여학생을 한 명씩 넣습니다.

남학생의 왼쪽에 있는 자리부터 0,1,2,3,4로 번호를 매겼습니다. 한 자리에 여학생을 두 명 넣을 수 없습니다.

전체는 $7!$가지이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4!\,{}_5\mathrm{C}_3\,3!}{7!}=\frac{2}{7}.$$

2. 양 끝이 남학생이라는 추가 조건을 반영한다

양 끝의 자리 0,4에 여학생이 없어야 합니다. 따라서 여학생은 안쪽의 세 자리 1,2,3에 모두 들어가야 합니다. A에서 가능한 자리 선택 10가지 중 1가지이므로 $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{1}{10}$입니다. 사람들의 순서 $4!3!$는 분자와 분모에서 같습니다.

3. 첫 여학생의 자리로 X를 센다

X는 고른 세 자리 번호의 최솟값입니다. 0을 고르면 나머지는 1,2,3,4 중 두 곳이고, 1이 최솟값이면 나머지는 2,3,4 중 두 곳입니다. 2가 최솟값이면 나머지는 3,4로 고정됩니다.

X	0	1	2
자리 선택 수	${}_4\mathrm{C}_2=6$	${}_3\mathrm{C}_2=3$	1
조건부확률	$\dfrac{3}{5}$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{1}{10}$

$$\mathrm{E}(X\mid A)=0\cdot\frac{3}{5}+1\cdot\frac{3}{10}+2\cdot\frac{1}{10}=\boxed{\frac{1}{2}}.$$

제출용 모범답안

남학생을 먼저 세우고 5개 자리 중 3곳에 여학생을 한 명씩 넣으면 된다. 따라서 $\mathrm{P}(A)=\dfrac{4!{}_5\mathrm{C}_3 3!}{7!}=\dfrac{2}{7}$이다. 사건 B는 안쪽 세 자리를 모두 고르는 한 가지 경우이므로 $\mathrm{P}(B\mid A)=\dfrac{1}{10}$이다. 첫 여학생의 자리 번호가 0,1,2일 경우의 수는 6,3,1이므로 조건부 평균은 $\dfrac{0\cdot 6+1\cdot 3+2\cdot 1}{10}=\dfrac{1}{2}$이다.

빠른 풀이 두 조건부 계산에서는 사람들의 순서를 일일이 쓰지 않아도 됩니다. 모든 자리 선택마다 같은 $4!3!$가지 순서가 대응하기 때문입니다.

약점 점검 사건 A에서 X의 값 0,1,2가 같은 확률로 나오는 것은 아닙니다. 각 값에 대응하는 자리 선택의 수를 따로 세어야 합니다.

채점 기준

평가 내용	배점
자리 선택과 전체 확률	7점
양 끝 조건	5점
X의 분포	5점
평균	3점
합계	20점

출처·변형 기록 ANALOG Theme 01의 인접 금지·같은 것이 있는 배열 발상을 중앙대 조건부확률·기댓값 형식으로 재구성한 자체 제작.

문제 2 상세해설

20점

대칭 곡선의 접선과 좌표 합의 최댓값

[2-1] 12점 · [2-2] 8점

풀이의 출발점

x^2+y^2를 s로 묶어 두면 미분식과 부등식이 모두 짧아집니다. 접점 계산과 전체 곡선에서의 최댓값 계산은 서로 다른 조건입니다.

1. 기울기 1인 조건을 만든다

$s=x^2+y^2$라 하면 미분식은 $s(x+yy')=2(y+xy')$입니다. 따라서

$$y'=\frac{2y-xs}{ys-2x}.$$

기울기 1인 점에서는 $2y-xs=ys-2x$, 즉

$$(x+y)(2-s)=0.$$

제1사분면에서는 $x+y>0$이므로 $s=2$입니다. 원래 식에서 $xy=\frac{1}{2}$이고

$$(x+y)^2=s+2xy=3,\qquad (y-x)^2=s-2xy=1.$$

따라서 접점은

$$\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right),\qquad \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right).$$

두 점에서 분모는 $2(y-x)=\pm 2$로 0이 아닙니다. 접선은 각각 $\boxed{y=x+1}$, $\boxed{y=x-1}$입니다.

제출용 모범답안

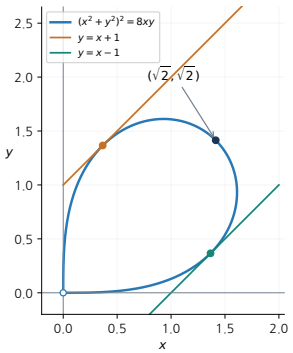
음함수 미분에서 $y'=1$은 $(x+y)(2-x^2-y^2)=0$을 준다. $x,y>0$이므로 $x^2+y^2=2, xy=\frac{1}{2}$이다. 따라서 $x+y=\sqrt{3}, y-x=\pm 1$이고 두 접점과 접선 $y=x\pm 1$을 얻는다.

2. 제곱의 합과 곱의 부등식을 적용한다

$(x-y)^2\ge 0$에서 $2xy\le s$입니다. 곡선의 식 $s^2=8xy$와 함께 쓰면 $s^2\le 4s$이고, $s>0$이므로 $s\le 4$입니다. 또한

$$(x+y)^2=s+2xy\le 2s\le 8.$$

따라서 $x+y\le 2\sqrt{2}$입니다. 두 등호가 동시에 성립하려면 $x=y$, $s=4$이어야 하므로 $(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$입니다. 이 점은 원래 식을 실제로 만족합니다.



기울기 1인 두 접선과 좌표 합이 최대인 점입니다. 원점은 제1사분면 조건에서 제외합니다.

제출용 모범답안

$s=x^2+y^2>0$라 하면 $s^2=8xy\le 4s$이므로 $s\le 4$이다. 따라서 $(x+y)^2\le 2s\le 8$이다. $(\sqrt{2},\sqrt{2})$에서 모든 등호가 성립하므로 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

빠른 풀이 접선 문제에서는 $x+y$를 묶어 인수분해하고, 최댓값 문제에서는 $(x-y)^2\ge 0$을 씁니다. 대칭성을 먼저 찾으면 계산 방향이 보입니다.

약점 점검 [2-1]에서 얻은 두 점만 비교해서 전체 곡선의 최댓값을 정할 수는 없습니다. 전체 점에 적용되는 상한과 그 상한을 갖는 점이 필요합니다.

채점 기준

평가 내용	배점
[2-1] 음함수 미분	4점
[2-1] 좌표·접선·분모 확인	8점
[2-2] 전체 곡선의 상한	5점
[2-2] 등호 성립	3점
합계	20점

출처·변형 기록 창의형 2회 2번의 음함수 접선 구조에 좌표 합의 최댓값을 연결한 변형.

문제 3-1 상세해설

15점

세 함수의 최댓값으로 정의된 함수

풀이의 출발점
세 후보를 모든 구간에서 비교하기 전에 대칭을 찾습니다. 두 바깥 포물선 중 큰 것을 먼저 고르면, 실제 비교는 두 함수만 남습니다.

1. 두 바깥 포물선 중 큰 것을 고른다

$$(x+1)^2-(x-1)^2=4x.$$

따라서 $x\ge 0$에서는 $(x+1)^2$, $x\le 0$에서는 $(x-1)^2$가 큽니다. 전체 최댓값 함수는 짝함수이고, $x\ge 0$에서

$$G(x)=\max\{(x+1)^2,\,2-x^2\}.$$

2. 최댓값을 주는 식이 바뀌는 점을 찾는다

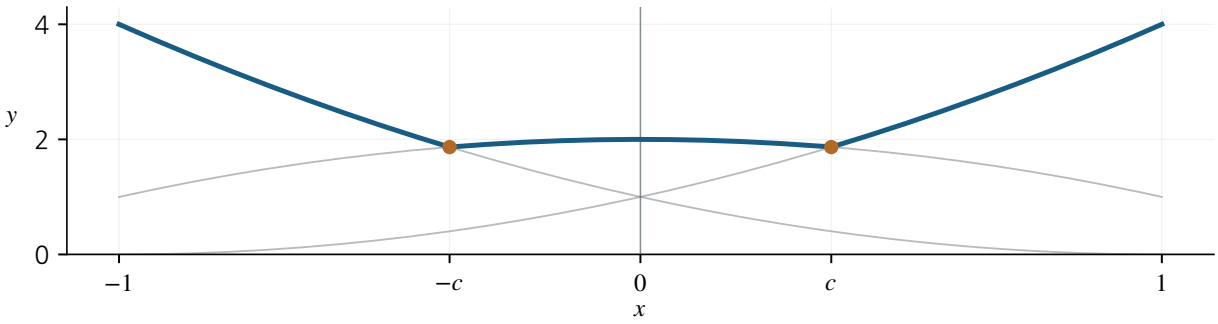
$$(x+1)^2=2-x^2 \quad\Longleftrightarrow\quad 2x^2+2x-1=0.$$

양의 해를 $c=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$라 하면

$$G(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & -1\le x<-c,\\ 2-x^2, & -c\le x\le c,\\ (x+1)^2, & c<x\le 1.\end{cases}$$

3. 식이 바뀌는 점의 좌우 미분계수를 비교한다

$x=c$에서 왼쪽은 $-2c$, 오른쪽은 $2(c+1)$로 다릅니다. $x=-c$에서 왼쪽은 $-2(c+1)$, 오른쪽은 $2c$로 다릅니다. $x=0$ 근방은 하나의 식 $2-x^2$이므로 미분가능합니다. 후보 포물선의 교점이라고 해서 모두 꺾이는 것은 아닙니다.



회색은 세 후보, 파란 실선은 실제 최댓값 함수입니다. 꺾임은 가장 높은 식이 바뀌는 두 점에만 생깁니다.

4. 짝함수의 대칭으로 적분한다

$$\int_{-1}^{1}G(x)\,dx=2\left\{\int_{0}^{c}(2-x^2)\,dx+\int_{c}^{1}(x+1)^2\,dx\right\}$$
$$=\frac{14}{3}+2c-2c^2-\frac{4}{3}c^3.$$

여기서 $2c^2+2c=1$, 즉 $c^2=\dfrac{1}{2}-c$이고 $c^3=\dfrac{3}{2}c-\dfrac{1}{2}$이므로

$$\frac{14}{3}+2c-2c^2-\frac{4}{3}c^3=\frac{13}{3}+2c=\frac{10}{3}+\sqrt{3}.$$

제출용 모범답안

$(x+1)^2-(x-1)^2=4x$이므로 G는 짝함수이고 $x\ge 0$에서는 $(x+1)^2$와 $2-x^2$만 비교하면 된다. 두 식이 같은 양의 점은 $c=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$이다. 따라서 G는 위의 세 구간별 식으로 정해진다. c에서 좌우 미분계수는 $-2c, 2(c+1)$, $-c$에서는 $-2(c+1), 2c$이므로 미분불가능한 점은 $\pm c$이다. 대칭으로 적분하고 $2c^2+2c=1$을 이용하면 적분값은 $\dfrac{10}{3}+\sqrt{3}$이다.

빠른 풀이 적분 결과에 c^2, c^3이 남으면 제곱근을 바로 대입하지 마십시오. 경계점을 정한 이차방정식으로 높은 거듭제곱부터 줄이면 계산이 짧아집니다.

약점 점검 모든 후보의 교점을 모두 분할점으로 쓰면 불필요한 구간이 많아집니다. 최댓값을 실제로 주는 식이 바뀌는 곳만 남겨야 합니다.

채점 기준

평가 내용	배점
대칭과 후보 압축	4점
구간 분류 및 좌우 미분계수	6점
대칭 적분과 경계식 활용	5점
합계	15점

출처·변형 기록 성균관대 수리형 최댓값 함수 연계. 개별질문 2SET 문제 04(PDF 6쪽)와 이소원 CORE02 프린트의 후보 압축 발상을 세 포물선의 대칭·미분가능성·적분으로 재구성했습니다.

문제 3-2 상세해설

15점

연속성으로 선택하는 함수와 정적분의 극값

풀이의 출발점
각 점에서 두 식 중 하나를 고르는 것처럼 보이지만, 연속성 때문에 마음대로 바꿀 수 없습니다. 두 후보가 같은 점에서만 식을 바꿀 수 있습니다.

1. 두 후보와 교점을 찾는다

모든 x에서 $f(x)=x^2-1$ 또는 $f(x)=2x-1$입니다. 두 후보가 같은 점은

$$x^2-1=2x-1 \quad\Longleftrightarrow\quad x=0,2.$$

$(-\infty,0),(0,2),(2,\infty)$ 안에서는 후보가 다르므로 연속함수는 같은 후보를 계속 선택해야 합니다. 이를 설명하려면 $x\neq 0,2$에서

$$Q(x)=\frac{f(x)-(2x-1)}{x^2-2x}$$

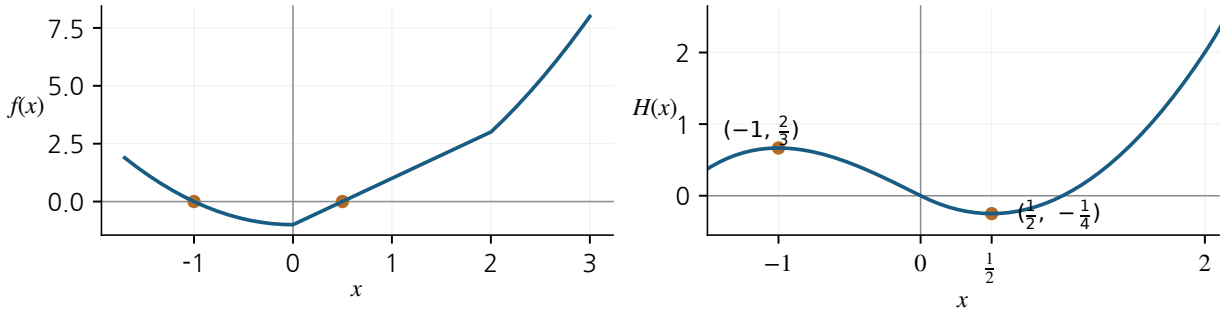
를 생각하면 됩니다. Q는 연속이고 값이 0 또는 1입니다. 한 구간 안에서 두 값을 모두 가지면 사잇값정리에 의해 $\frac{1}{2}$도 가져야 하므로 모순입니다.

2. 각 구간의 조건으로 후보를 확정한다

$f(-1)=0$은 첫 구간에서 x^2-1을, $f(1)=1$은 중앙 구간에서 $2x-1$을, $f(3)=8$은 마지막 구간에서 x^2-1을 고르게 합니다.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 0,\\ 2x-1, & 0<x<2,\\ x^2-1, & x\ge 2. \end{cases}$$

교점 $0,2$에서는 후보 값이 같으므로 연속성도 만족합니다.



실제 선택된 그래프와 H의 증감을 함께 표시했습니다. f의 부호가 H의 증감을 정합니다.

3. 적분 함수의 도함수 부호를 조사한다

f가 연속이므로 $H'(x)=f(x)$입니다.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},\infty)$
$H'=f$	$+$	0	$-$	0	$+$
H	증가	극대	감소	극소	증가

접합점 $0,2$에서 f의 부호는 바뀌지 않으므로 H의 극값도 생기지 않습니다.

4. 극값을 적분으로 계산한다

$$H(-1)=-\int_{-1}^{0}(t^2-1)\,dt=\frac{2}{3},\qquad H\left(\frac{1}{2}\right)=\int_{0}^{\frac{1}{2}}(2t-1)\,dt=-\frac{1}{4}.$$

제출용 모범답안

두 후보 $x^2-1, 2x-1$의 교점은 $0, 2$이다. 각 교점 사이에서 $\dfrac{f(x)-(2x-1)}{x^2-2x}$는 연속이고 값이 $0, 1$뿐이므로 사잇값정리에 의해 일정하다. 세 함수값 조건으로 $f=x^2-1$은 $x\le 0, x\ge 2$, $f=2x-1$은 $0<x<2$에서 성립한다. $H'=f$의 부호는 -1에서 양에서 음, $\dfrac{1}{2}$에서 음에서 양으로 바뀐다. 따라서 $x=-1$에서 극댓값 $\dfrac{2}{3}$, $x=\dfrac{1}{2}$에서 극솟값 $-\dfrac{1}{4}$이다.

빠른 풀이 H의 식을 전 구간에서 따로 구할 필요는 없습니다. $H'=f$의 부호로 극값 위치를 먼저 확정한 뒤 필요한 두 값만 적분하십시오.

약점 점검 f가 접합점에서 미분가능하지 않아도 $H'=f$는 성립합니다. 필요한 조건은 f의 연속성입니다.

채점 기준

평가 내용	배점
교점과 연속 선택의 정당화	5점
세 구간 함수식	4점
부호변화와 두 적분값	6점
합계	15점

출처·변형 기록 가천대 공통 CORE TYPE11(PDF 13쪽)·공통 WORKBOOK의 연속 함수 선택 연계. 후보를 이차함수·일차함수로 바꾸어 접합점 두 개와 적분 함수의 극값을 함께 다룹니다.

문제 4-1 상세해설

15점

함수방정식과 작은 구간의 부등식으로 미분가능성 증명

풀이의 출발점
문제는 처음부터 f가 미분가능하다고 말하지 않습니다. 0 근처의 부등식으로 먼저 0에서의 미분계수를 얻고, 함수방정식으로 그 정보를 모든 점으로 옮깁니다.

1. 함수방정식에 0을 대입하여 함수값을 정한다

$x = y = 0$을 대입하면 $f(0) = 2f(0) + 1$이므로 $f(0) = -1$입니다. 따라서 둘째 조건은

$$|f(h) - f(0)| \le h^2$$

입니다. $h \neq 0$일 때 양변을 $|h|$로 나누면

$$\left|\frac{f(h) - f(0)}{h}\right| \le |h|.$$

좌우 어느 방향에서도 오른쪽이 0으로 가므로 미분계수의 정의에서 $f'(0) = 0$입니다. 연속성도 함께 얻지만, 여기서는 미분계수까지 직접 확인합니다.

2. 임의의 점 x에서 미분계수의 식을 만든다

함수방정식에서 $y = h$로 놓으면

$$f(x + h) - f(x) = f(h) + 1 + xh(x + h + 1).$$

$f(0) = -1$을 사용하고 $h \neq 0$으로 나누면

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h} + x(x + h + 1).$$

오른쪽 첫 항은 0으로 가고 두 번째 항은 $x(x + 1)$로 갑니다. 따라서 모든 실수 x에서 왼쪽 극한이 존재하며

$$f'(x) = x^2 + x.$$

함수방정식을 바로 미분한 것이 아니라, 미분가능성을 먼저 증명한 것입니다.

3. 도함수와 한 함수값으로 f를 복원한다

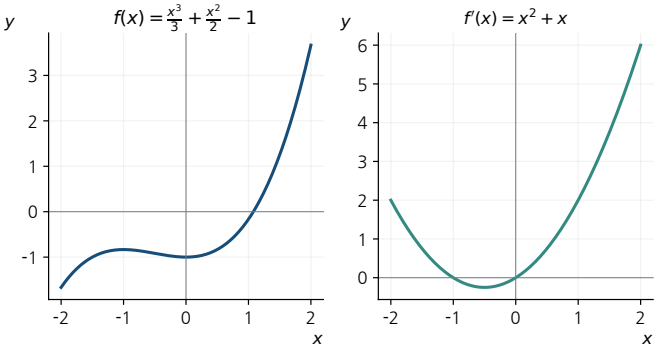
$P(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$라 하면 $P'(x) = x^2 + x = f'(x)$입니다. 따라서 $f - P$의 도함수가 모든 실수에서 0입니다. 평균값정리에 의해 $f - P$는 상수이며, $f(0) = -1$에서

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 1}.$$

원래 함수방정식도 확인할 수 있습니다. $P(x + y) - P(x) - P(y) = xy(x + y + 1)$이고 상수항을 함께 넣으면 문제의 $+1$까지 일치합니다.

4. 도함수의 합을 계산한다

$$\sum_{k=1}^{10} f'(k) = \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k = \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} + \frac{10 \cdot 11}{2} = 385 + 55 = \boxed{440}.$$



미분계수를 정의로 구한 뒤 얻은 함수와 도함수입니다. 그림을 보고 미분가능성을 가정하는 순서는 허용되지 않습니다.

약점 점검 아직 미분가능하다고 주어지지 않은 함수방정식을 양변 미분하면 논증의 출발점이 빠집니다.

제출용 모범답안

$x=y=0$에서 $f(0)=-1$이다. 둘째 조건을 $|h|$로 나누어 끼워넣으면 $f'(0)=0$이다. 함수방정식으로 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{f(h)-f(0)}{h}+x(x+h+1)$이므로 모든 x에서 미분가능하고 $f'(x)=x^2+x$이다. $f(0)=-1$을 이용하면 $f=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}-1$이며 도함수의 합은 $385+55=440$이다.

채점 기준

평가 내용	배점
f(0)와 부등식 정리	2점
f′(0)의 극한	3점
임의의 점에서 미분계수	5점
함수 복원	2점
도함수의 합	3점
합계	15점

출처·변형 기록 중앙대 2024 자연계열 모의 3-2. 제공 합본 99쪽. 조건 유지, 미분가능성의 증명과 함수 결정 요구를 명시한 재편.

문제 4-2 상세해설

15점

지수함수의 나머지를 적분 비교로 끼우기

풀이의 출발점
전개식 없이도 $1 \le e^u \le e^x$를 차례로 적분하면 필요한 x^3 항이 생깁니다. 먼저 x를 고정해 상한 e^x를 일정하게 유지하고, 그 부등식을 작은 구간 $\frac{t}{n}$에 적용합니다.

1. 지수함수의 부등식을 한 번 적분합니다.

$x \ge 0$를 고정합니다. $0 \le u \le x$이면 $1 \le e^u \le e^x$입니다. $0 \le v \le x$에 대하여 $u = 0$부터 v까지 적분하면

$$v \le e^v - 1 \le e^x v.$$

여기서 상한의 e^x는 고정된 상수입니다. e^v로 바꾸어 적분하려고 하지 않아도 됩니다.

2. 같은 부등식을 두 번 더 적분합니다.

$0 \le w \le x$에서 앞의 부등식을 $v = 0$부터 w까지 적분하면

$$\frac{w^2}{2} \le e^w - 1 - w \le e^x \frac{w^2}{2}.$$

이를 다시 $w = 0$부터 x까지 적분하면

$$\frac{x^3}{6} \le e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \le e^x \frac{x^3}{6}.$$

즉 문제의 부등식이 증명되었습니다. $x = 0$에서는 세 값이 모두 0으로 같고, $x > 0$에서는 필요한 약한 부등식이 그대로 성립합니다.

3. 극한 속의 식을 $F(\frac{t}{n})$으로 인식합니다.

$0 \le t \le 1$이면 $0 \le \frac{t}{n} \le \frac{1}{n}$이므로

$$\frac{t^3}{6n^3} \le F(\frac{t}{n}) \le e^{\frac{t}{n}} \frac{t^3}{6n^3} \le e^{\frac{1}{n}} \frac{t^3}{6n^3}.$$

양변에 n^3을 곱하고 $t = 0$부터 1까지 적분합니다.

$$\frac{1}{24} \le n^3 \int_0^1 F(\frac{t}{n})\, dt \le \frac{e^{\frac{1}{n}}}{24}.$$

4. 같은 값으로 수렴하는 두 수열 사이에 끼웁니다.

$e^{\frac{1}{n}} \to 1$이므로 양쪽은 모두 $\frac{1}{24}$로 수렴합니다. 샌드위치 정리에 의해

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^3 \int_0^1 F(\frac{t}{n})\, dt = \frac{1}{24}}.$$

점별 극한 $n^3 F(\frac{t}{n}) \to \frac{t^3}{6}$만 보고 적분과 극한을 바꾸는 대신, 위처럼 **정적분 전체를 같은 두 값 사이에 끼우면** 고교의 정적분 비교와 수열 극한만으로 끝납니다.

제출용 모범답안

$x \geq 0$를 고정하고 $1 \leq e^u \leq e^x$ $(0 \leq u \leq x)$를 세 번 적분하면 $x^{\frac{3}{6}} \leq F(x) \leq e^x x^{\frac{3}{6}}$이다. 따라서 $0 \leq t \leq 1$에서

$$\frac{t^3}{6} \leq n^3 F(\frac{t}{n}) \leq e^{\frac{1}{n}} \frac{t^3}{6}.$$

적분하면 $\frac{1}{24} \leq n^3 \int_0^1 F(\frac{t}{n})\, dt \leq \frac{e^{\frac{1}{n}}}{24}$이므로 극한은 $\frac{1}{24}$이다.

빠른 풀이 e^x에서 $1, x, \frac{x^2}{2}$를 차례로 빼는 것은 e^u를 적분할 때 생기는 초기값을 차례로 제거하는 과정입니다. 적분을 세 번 하면 $x^{\frac{3}{6}}$이 남고, 마지막에 $\int_0^1 t^3\, dt = \frac{1}{4}$가 곱해져 $\frac{1}{24}$가 됩니다.

채점 기준

평가 내용	배점
고정된 상한으로 정적분 비교	2점
세 번 적분하여 부등식 완성	3점
t/n 대입과 $e^{1/n}$의 공통 상한	4점
정적분 전체의 상하계	4점
샌드위치 극한	2점
합계	15점

출처·변형 기록 Blue Math 연세 WORKBOOK WB14·WB17의 지수함수 비교와 개념총정리의 정적분 대소관계 결합.