

논술에서 수능으로

① 격자점

경희대 모의논술 연계·수능형 변형·평가원 기출로
완성하는 격자점 추론

2027학년도 | 문제편

문제편

논술 연계 I(1)·(2) → 공통 22번 2문항 → 미적분 29번 → 확통 30번 → 기출 4문항

문항	교육과정 범위·성격
01	2027 경희대 모의논술 자연계 논제 I(1)(2) · 조건 재서술
02	수학 I·II / 격자점 + 교점 개수 불연속·공통 22
03	수학 I·II / 격자점 + 정적분 넓이·공통 22
04	공통 + 미적분 / 격자점 + 수열의 극한·미적분 29
05	공통 + 확률과 통계 / 격자점 + 조건부 분포·확통 30
06	2017 학년도 수능 수학 나형 21 번·기출 재서술
07	2014 학년도 수능 수학 A 형 30 번·지수함수·격자
08	2018 학년도 6 월 모의평가 나형 21 번·자연수 좌표
09	2017 학년도 9 월 모의평가 나형 30 번·격자 정사각형

02 격자 × 교점의 개수 · 공통 22 번

BlueMath 창작 변형 / 수학 I · 수학 II / 단답형 4점

22. n 은 2 이상의 자연수이다. 최고차항의 계수가 각각 1 인 삼차함수 $f(x)$ 와 이차함수 $g(x)$ 는

$$f(-n) = f(0) = g(0) = g(n) = 0$$

을 만족한다. 함수

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \leq 0), \\ g(x) & (x > 0) \end{cases}$$

는 $x = 0$ 에서 미분가능하다.

곡선 $y = |h(x)|$ 와 x 축으로 둘러싸인 두 유계 영역 중 왼쪽 영역 내부의 격자점 수를 a , 오른쪽 영역 내부의 격자점 수를 b 라 하자.

양수 t 에 대하여 곡선 $y = |h(x)|$ 전체와 직선

$$y = t(x + n)$$

의 서로 다른 교점의 개수를 $N(t)$ 라 한다. $N(t)$ 가 $t = a - b$ 에서 불연속일 때, $a + b$ 의 값을 구하시 오. [4점]

(단, 격자점은 두 좌표가 정수인 점이며 영역의 경계 위의 점은 세지 않는다.)

풀이 공간

먼저 읽기 격자점 문제의 공통 출발점

핵심 한 줄 정수 $x = k$ 를 먼저 고정한 다음, 가능한 정수 y 의 개수를 세로줄마다 세어 합한다. 구간의 양 끝을 포함하는지 제외하는지에 따라 마지막에 $+1, -1$ 이 달라진다.

1. 곡선 높이가 정수 $H > 0$ 일 때

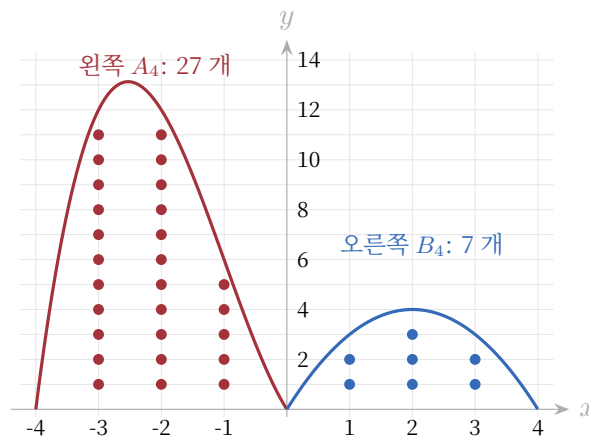
세로줄의 허용 조건	정수 y	개수
$0 < y < H$	$1, 2, \dots, H-1$	$H-1$
$1 \leq y \leq H$	$1, 2, \dots, H$	H

경희대 논제의 내부 격자점은 첫째 행, 2014 수능 A형 30번은 $y=1$ 을 포함하므로 둘째 행이다.

무작정 높이에서 1 을 빼는 공식만 외우면 경계 포함 기출에서 틀리게 된다. **2. 격자점의 위치를 세로줄로 분할한다**

정수 x 선택 $\rightarrow$ 높이 계산 $\rightarrow$ 정수 y 세기 $\rightarrow \sum$

k 의 범위도 중요하다. $-n < x < 0$ 의 정수 x 는 $x = -k$ 로 바꾸면 $k = 1, \dots, n-1$ 이다. 경계인 $-n$ 과 0 은 세지 않는다. **3. 실제 격자점 그림:** $n = 4$



$n = 4$ 의 정확한 곡선과 내부 격자점 (빨강: 왼쪽, 파랑: 오른쪽)

왼쪽 A_4 의 세로줄 높이 (6, 12, 12) 에서 각각 1 을 빼서 $5 + 11 + 11 = 27$ 개, 오른쪽 B_4 의 높이 (3, 4, 3) 에서 각각 1 을 빼서 $2 + 3 + 2 = 7$ 개이다. 곡선 위 점과 x 축 위 점은 칠하지 않았다.

02 창작 공통 22 —격자점에서 교점 개수 불연속으로

출처: BlueMath 창작 변형 / 수학 I·II / 정답 34

STEP 1. 앞에서 구한 격자점 수의 차를 사용한다

이 문항은 원논제와 같은 함수를 사용한다. 미분가능성으로 세 번째 근은 1이며,

$$a - b = \sum_{k=1}^{n-1} k^2(n-k) = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

$n \geq 2$ 이므로 $a - b > 0$ 이고, 점의 개수 차이이므로 $a - b$ 는 정수다. **STEP 2. 교점 개수 함수 $N(t)$ 가 바뀌는 기울기를 찾는다**

원논제 I (2) 의 결과에서 $t > 0$ 일 때

$$N(t) = \begin{cases} 5 & (0 < t < (3 - 2\sqrt{2})n), \\ 4 & (t = (3 - 2\sqrt{2})n), \\ 3 & ((3 - 2\sqrt{2})n < t < n(n+1)), \\ 2 & (t \geq n(n+1)). \end{cases}$$

불연속점은 정확히 $t = (3 - 2\sqrt{2})n$ 과 $t = n(n+1)$ 이다. 첫째 수는 n 이 양의 정수일 때 무리수인데, $a - b$ 는 정수다. 따라서 문제의 불연속 조건은

$$a - b = n(n+1)$$

을 뜻한다. **STEP 3. 자연수 n 을 결정한다**

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} = n(n+1)$$

$$n(n-1) = 12$$

$$(n-4)(n+3) = 0.$$

$n \geq 2$ 이므로 $n = 4$ 이다. **STEP 4. $a + b$ 를 구한다**

$n = 4$ 일 때 세로줄 높이를 바로 대입한다.

$$a = (6-1) + (12-1) + (12-1) = 27,$$

$$b = (3-1) + (4-1) + (3-1) = 7.$$

$$\text{정답 } a + b = 34$$

쏙쏙 수열 일반항을 끝까지 두 개 전개할 필요가 없다. $a - b$ 만 대칭성으로 계산하고 불연속이 일어나는 정수 기울기 $n(n+1)$ 을 찾으면 $n = 4$ 다. 마지막 $a + b$ 는 작은 n 에서 직접 세는 편이 빠르다.

05 창작 확통 30 —격자점에서 조건부확률과 분산으로

출처: BlueMath 창작 변형 / 수학 I·II + 확률과 통계 / 정답 119

STEP 1. 격자점 개수 차이로 n 을 결정한다

원문의 격자점 계산에서

$$a - b = \frac{n^2(n^2 - 1)}{12}.$$

$a - b = 20$ 이므로 $n^2(n^2 - 1) = 240$ 이다. $t = n^2$ 을 대입하면

$$t(t - 1) = 240, \quad (t - 16)(t + 15) = 0$$

이고 자연수 $n \geq 3$ 에서 $\boxed{n = 4}$ 이다. **STEP 2. 같은 높이에 있는 격자점만 묶는다**

$n = 4$ 에서 왼쪽 A 의 $x = -1, -2, -3$ 세로줄 높이는 6, 12, 12, 오른쪽 B 의 $x = 1, 2, 3$ 높이는 3, 4, 3 이다. y 좌표가 같은 점 두 개를 선택하는 경우를 묶기 위해 각 높이별 점 수를 센다.

높이 y	$\#A_y$	$\#B_y$	$\#A_y + \#B_y$	$ A_y + B_y C_2$
1, 2	3	3	6	15 (각각)
3	3	1	4	6
4, 5	3	0	3	3 (각각)
6, 7, 8, 9, 10, 11	2	0	2	1 (각각)

그래서 y 좌표가 같은 두 점을 선택하는 전체 경우의 수는

$$2 \cdot {}_6C_2 + {}_4C_2 + 2 \cdot {}_3C_2 + 6 \cdot {}_2C_2 = 30 + 6 + 6 + 6 = 48$$

서로 다른 두 점을 **순서 없이** 뽑아도 되고 순서를 두어도 된다. 분자와 분모를 같은 방식으로 세면 조건부 확률은 동일하다. **STEP 3. 확률변수 X 의 값별 경우의 수**

X 는 선택한 두 점 중 A 에 속하는 점의 수이므로 0, 1, 2 중 하나다.

$$X = 2: \quad 2 \cdot {}_3C_2 + {}_3C_2 + 2 \cdot {}_3C_2 + 6 \cdot {}_2C_2 = 21$$

$$X = 1: \quad 2(3 \cdot 3) + (3 \cdot 1) = 21$$

$$X = 0: \quad 2 \cdot {}_3C_2 = 6$$

확인: $21 + 21 + 6 = 48$. 따라서

$$P(X = 0) = \frac{6}{48}, \quad P(X = 1) = \frac{21}{48}, \quad P(X = 2) = \frac{21}{48}.$$