

2027학년도

수리논술 FINAL

모의논술 · 수능 전 본시험 복기

기하

문제편

8묶음 · 본시험 복기 4 + 모의논술 4

수록 대학·범위·출처 안내 · 답안 작성 공간

맞보기 · 전체본 발췌

G03, MG01의 문제와 상세해설을 끝까지 담았습니다.

전체 수록 차례와 발췌한 본문은 원래 쪽수를 유지합니다.

차례에서 맞보기에 없는 문항은 이동되지 않습니다.

최민구 선생

BlueMath · Results, By Design.

2015 개정 교육과정 · 2026년 시행 / 2027학년도 대비

2026.10.25 판매 편집판 · r3

이 책에는 무엇이 있나요?

2027학년도 대학 모의논술과 수능 전에 시행된 주요 대학 본시험의 복기 문항을 함께 학습하는 기하 자료입니다. 단순한 정답 모음이 아니라 문제 접근과 서술 연습을 위한 교재입니다.

자료 구분	묶음 수	구성
수능 전 본시험 복기	4	확인 가능한 묶음 발췌
2027학년도 모의논술	4	대학 모의 문항 선별
합계	8	동일 조건을 공유하는 묶음

본시험 복기 수록 대학

서울시립대학교(1), 중앙대학교(2), 연세대학교(1)입니다. 괄호는 이 권에 수록한 묶음 수입니다.

모의논술 수록 대학

경희대학교(1), 서울시립대학교(1), 중앙대학교(1), 한양대학교(1)입니다. 괄호는 이 권에 수록한 묶음 수입니다.

학습 범위

이차곡선의 접선, 평면벡터와 내적, 공간도형과 정사영을 다룹니다. 공통 범위의 삼각비·좌표·평면도형을 선수 개념으로 사용합니다.

자료의 성격과 수록 기준

본시험 부분은 대학 공식 발표본을 대신하는 원문이 아니라, 확보한 복기 원고를 검토한 학습 자료입니다. 모의논술은 2027학년도 자료에서 선별했습니다. 대학의 전 문항이나 전국 모든 대학의 모의를 전수 수록한 책은 아닙니다. 여러 묶음 중 발췌하거나 발문을 보완한 부분은 해당 문항에 표시했습니다.

약술형, 자체 예상·변형, 과거 학년도 문항은 수록하지 않았습니다. 묶음 수는 소문항 수나 서로 다른 전국 시험 수를 뜻하지 않습니다. 기존 BlueMath 기출문제 정리1 및 Final에서 다룬 문항과 중복됩니다.

이렇게 공부합니다

문항 차례에서 출처와 학습 주제를 확인한 뒤 풀이를 작성합니다. 막혔다면 해설편에서 같은 문항 ID를 찾습니다. 해설을 읽은 뒤에는 근거를 가린 상태로 모범답안을 다시 써 보십시오. 문제편에는 정답이나 해설의 정정 메모를 넣지 않았습니다.

문항 차례와 찾기

번호 또는 ID를 누르면 해당 문항으로 이동합니다. 문제편과 해설편의 번호·ID는 같습니다.

번호·ID	학습 주제	대학·원 문항	쪽
I. 수능 전 본시험 복기			
01 · G01	쌍곡선과 두 점에서 만나는 원	서울시립대 2027학년도 복기 · 문제 1	4
02 · G02	쌍곡선 초점과 원의 두 접선	중앙대 2027학년도 복기 · 의약학 추가 문제 7	5
03 · G03	정사면체의 단면과 정사영	중앙대 2027학년도 복기 · 의약학 추가 문제 8	6
04 · G04	반직선과 아홉 점의 내적 부등식	연세대 2027학년도 복기 · 문제 4	7
II. 2027학년도 모의논술			
05 · MG01	서로 접하는 세 구와 정사영의 넓이	경희대 2027 모의 자연계 · 논제 III	8
06 · MG02	포물선의 두 접점과 내적	서울시립대 2027 모의 · 문제 2	9
07 · MG03	타원의 두 접선과 원 위 벡터의 최소	중앙대 2027 모의 · 의약학 추가 7·8	10
08 · MG04	포물선의 접선 점열과 반타원의 자취	한양대 2027 모의 · 문제 2 [2]·[3]	11

03. 정사면체의 단면과 정사영

문항 ID: G03 · 중앙대 2027학년도 복기 · 의약학 추가 문제 8

문제 확인

한 모서리 길이가 8인 정사면체 $ABCD$ 에서 $P \in AB, Q \in AC, R \in AD$ 이고

$$AP > AR, \quad AQ = 2, \quad \angle PQR = \frac{\pi}{2}, \quad PR = \sqrt{31}$$

입니다. 삼각형 BCD 를 평면 PQR 위로 정사영한 넓이를 구하시오.

정답

$$\frac{80\sqrt{21}}{21}$$

단면의 세 변을 AP, AR 로 나타냅니다

$AP = u, AR = v$ 라 하면 정사면체의 각 면에서 끼인각은 60° 입니다.

$$PR^2 = u^2 + v^2 - uv = 31, \quad PQ^2 = u^2 + 4 - 2u, \quad QR^2 = v^2 + 4 - 2v.$$

$PQ^2 + QR^2 = PR^2$ 에서 $uv = 2(u + v) - 8$ 입니다. $w = u + v$ 로 놓으면 $w^2 - 3uv = 31$ 이므로

$$w^2 - 6w - 7 = 0.$$

$w > 0$ 이므로 $w = 7, uv = 6$ 입니다. $u > v$ 이므로 $(u, v) = (6, 1)$ 입니다. 이때 $PQ = 2\sqrt{7}, QR = \sqrt{3}$ 이고 $[PQR] = \sqrt{21}$ 입니다.

작은 삼각형의 정사영으로 두 평면의 각을 구합니다

A, P, Q, R 의 평면 BCD 위 정사영을 각각 A_0, P', Q', R' 라 합니다. 정삼각형 BCD 의 중심 A_0 에서 꼭짓점까지 거리는 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ 입니다. 정사영에서 한 직선 위 선분들의 길이의 비는 유지됩니다. $\frac{AP}{AB} = \frac{3}{4}, \frac{AQ}{AC} = \frac{1}{4}, \frac{AR}{AD} = \frac{1}{8}$ 이므로 $\frac{A_0P'}{A_0B} = \frac{3}{4}, \frac{A_0Q'}{A_0C} = \frac{1}{4}, \frac{A_0R'}{A_0D} = \frac{1}{8}$ 입니다. 따라서 P, Q, R 의 정사영 P', Q', R' 는 세 방향으로 각각

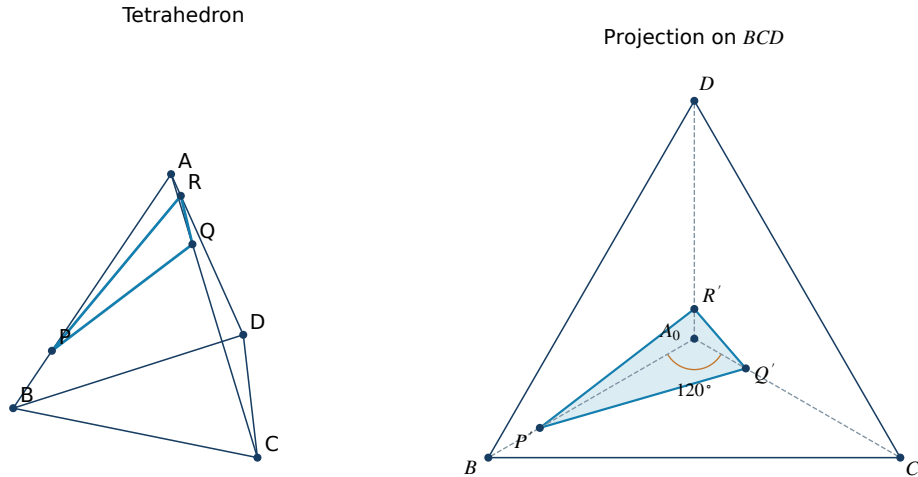
$$A_0P' = 2\sqrt{3}, \quad A_0Q' = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad A_0R' = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

떨어져 있습니다. 세 반직선 A_0B, A_0C, A_0D 사이의 각은 각각 120° 입니다. 각 반직선 위에 P', Q', R' 가 하나씩 있으므로 세 점을 이은 삼각형은 A_0 을 안쪽에 포함합니다. 세 삼각형의 넓이를 더하면

$$[P'Q'R'] = \frac{1}{2} \sin 120^\circ \left(4 + \frac{2}{3} + 2 \right) = \frac{5\sqrt{3}}{3}.$$

두 평면의 예각을 θ 라 하면 $\cos \theta = \frac{[P'Q'R']}{[PQR]} = \frac{5\sqrt{7}}{21}$ 입니다. 원래 구하는 정사영은 반대 방향이지만 같은 $\cos \theta$ 를 곱합니다. $[BCD] = 16\sqrt{3}$ 이므로 답은 $16\sqrt{3} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{21} = \frac{80\sqrt{21}}{21}$ 입니다.

아래 평면도에서 A_0 와 P', Q', R' 를 연결하면 세 각이 모두 120° 인 세 삼각형으로 나뉩니다. 넓이를 구할 때 두 변 길이의 곱은 차례로 $4, \frac{2}{3}, 2$ 가 되므로 빠지는 부분이나 두 번 더한 부분이 없습니다.



왼쪽은 정사면체와 단면, 오른쪽은 평면 BCD 위의 정사영입니다. 오른쪽의 A_0 에서 세 꼭짓점으로 향하는 반직선 사이 각은 모두 120° 입니다.

자주 하는 실수

작은 삼각형을 정사영하여 구한 코사인을 다른 삼각형에 적용할 때도 두 평면 사이의 각이 같다는 점을 확인해야 합니다.

제출용 모범답안

$AP = u$, $AR = v$ 라 하면 코사인법칙에서 $u^2 + v^2 - uv = 31$, $PQ^2 = u^2 + 4 - 2u$, $QR^2 = v^2 + 4 - 2v$ 입니다. 직각 조건으로 $uv = 2(u + v) - 8$ 이고, $w = u + v$ 라 놓으면 $w^2 - 6w - 7 = 0$ 입니다. $w > 0$, $u > v$ 이므로 $w = 7$, $uv = 6$, $(u, v) = (6, 1)$ 이며 $[PQR] = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{21}$ 입니다.

A, P, Q, R 의 평면 BCD 위 정사영을 A_0, P', Q', R' 라 합니다. A_0 은 정삼각형 BCD의 중심이고 $A_0B = A_0C = A_0D = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ 입니다. 정사영의 선분 비에서 $\frac{A_0P'}{A_0B} = \frac{3}{4}$, $\frac{A_0Q'}{A_0C} = \frac{1}{4}$, $\frac{A_0R'}{A_0D} = \frac{1}{8}$ 입니다. 따라서 세 길이는 $2\sqrt{3}$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 이고 사이각은 각각 120° 입니다. A_0 을 꼭짓점으로 하는 세 삼각형의 넓이를 더하면 $[P'Q'R'] = \frac{1}{2} \sin 120^\circ (4 + \frac{2}{3} + 2) = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ 입니다. 두 평면 사이 예각의 코사인은 $\frac{[P'Q'R']}{[PQR]} = \frac{5\sqrt{7}}{21}$ 입니다. 반대 방향의 정사영에도 같은 값을 곱하므로 답은 $16\sqrt{3} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{21} = \frac{80\sqrt{21}}{21}$ 입니다.

BlueMath 연습용 채점 기준

단면 길이 연립 4점, 작은 삼각형·정사영 3점, 코사인 비와 최종 넓이 3점.

대학 공식 배점·채점 기준이 아니라, 풀이를 점검하기 위한 10점 기준입니다. 맞게 제시한 근거에 해당하는 항목만 인정하며, 같은 실수를 여러 항목에서 반복 감점하지 않습니다.

다시 쓸 판단

큰 도형의 정사영을 직접 구하기 어렵다면 같은 두 평면에 놓인 더 간단한 도형의 넓이비로 평면 사이 각을 구합니다.

05. 서로 접하는 세 구와 정사영의 넓이

문항 ID: MG01 · 경희대 2027 모의 자연계 · 논제 III

문제 확인

평면 α 의 같은 쪽에 반지름이 1, 2, 3인 세 구가 있고, 각각 평면과 접하며 서로 외접합니다. 중심은 O_1, O_2, O_3 이고 이들이 만드는 평면을 β 라 합니다.

(1) 두 평면이 이루는 예각 θ 에 대해 $\cos \theta$ 를 구하시오.

(2) 직선 O_1O_2, O_2O_3 와 평면 α 의 교점을 A, B, O_3 에서 α 에 내린 발을 P_3 라 합니다. $S_1 = [O_3AB]$, $S_2 = [P_3AO_2]$ 일 때 $\frac{S_2}{S_1}$ 을 구하시오.

정답

(1) $\frac{\sqrt{23}}{6}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

(1) 중심 사이 거리와 정사영 사이 거리를 구별합니다

중심 거리는 반지름의 합이므로 $O_1O_2 = 3, O_1O_3 = 4, O_2O_3 = 5$ 입니다. 따라서 중심 삼각형 넓이는 6입니다. 정사영을 P_1, P_2, P_3 라 하면 높이 차를 피타고라스로 빼서

$$P_1P_2 = 2\sqrt{2}, \quad P_1P_3 = 2\sqrt{3}, \quad P_2P_3 = 2\sqrt{6}.$$

평면 α 안의 좌표를 $P_1 = (0, 0), P_2 = (2\sqrt{2}, 0)$ 로 잡고 $P_3 = (a, b), b > 0$ 이라 놓습니다. 두 거리식은 $a^2 + b^2 = 12, (a - 2\sqrt{2})^2 + b^2 = 24$ 입니다. 뒤 식에서 앞 식을 빼면 $-4\sqrt{2}a + 8 = 12$ 이므로 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, 이어서 $b^2 = \frac{23}{2}$ 입니다. 따라서 $P_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{46}}{2})$ 로 잡을 수 있습니다. 따라서 정사영 삼각형 넓이는 $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{46}}{2} = \sqrt{23}$ 입니다. 넓이의 정사영 관계로 $\cos \theta = \frac{\sqrt{23}}{6}$ 입니다.

(2) 높이의 비로 평면까지 연장한 길이를 구합니다

O_1, O_2 의 높이가 1, 2이므로 A는 O_2 에서 O_1 쪽으로 두 배 거리만큼 가서 만납니다. 따라서 $AO_2 = 6$ 입니다. O_2, O_3 의 높이가 2, 3이므로 B는 O_2 에서 O_3 의 반대 방향으로 두 배 거리만큼 가서 만나며 $BO_3 = 3O_2O_3$ 입니다. 첫 두 삼각형은 직선 O_1O_2 에 대한 높이가 같아 밑변의 비 2를 적용하고, 다음에는 직선 O_2O_3 에 대한 높이가 같아 밑변의 비 3을 적용합니다. 따라서

$$[AO_2O_3] = 2[O_1O_2O_3] = 12, \quad S_1 = 3[AO_2O_3] = 36.$$

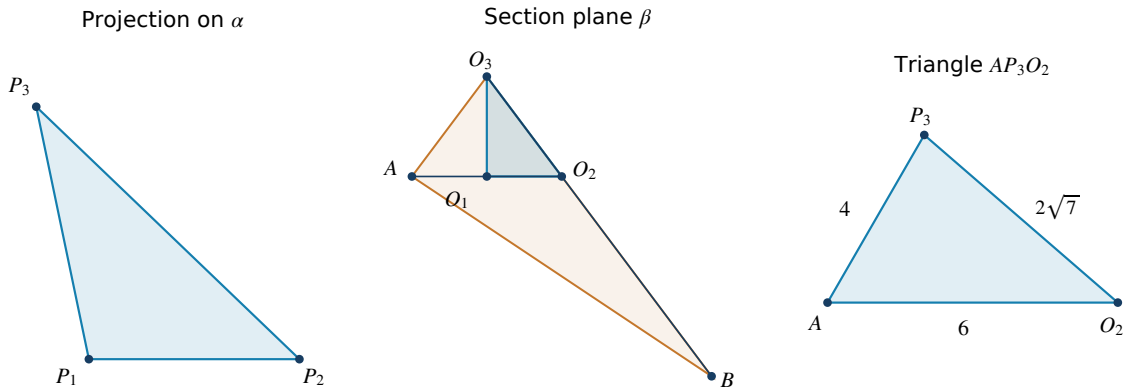
중심 삼각형에서 $\cos \angle O_1O_2O_3 = \frac{3}{5}$ 입니다. 그러므로 코사인법칙에 대입하면

$$AO_3^2 = 6^2 + 5^2 - 2 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 36 + 25 - 36 = 25.$$

$O_3P_3 = 3$ 에서 $AP_3 = 4$ 입니다. 또한 $O_2P_3^2 = P_2P_3^2 + O_2P_2^2 = 24 + 4 = 28$ 입니다. 삼각형 AP_3O_2 의 세 변이 4, 6, $2\sqrt{7}$ 이므로 A의 각의 코사인은 $\frac{16+36-28}{48} = \frac{1}{2}$ 입니다. 따라서 $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ 이고 비는 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 입니다.

두 평면의 그림을 구별해서 읽습니다

아래 왼쪽 그림은 평면 α 위의 정사영 $P_1P_2P_3$ 입니다. 가운데는 세 중심을 지나는 평면 β 를 정면에서 본 그림입니다. A, O_1, O_2 와 B, O_2, O_3 는 각각 이 순서로 일직선 위에 있습니다. $AO_2 = 2O_1O_2, BO_3 = 3O_2O_3$ 인 위치를 확인하면 위에서 넓이의 비 2와 3을 적용한 이유가 보입니다. P_3 는 평면 α 의 점이며 평면 β 그림의 점으로 옮겨 놓지 않았습니다. 오른쪽은 넓이 S_2 를 구할 때 사용한 삼각형 AP_3O_2 를 별도로 정면에서 본 그림입니다.



왼쪽은 평면 α 위의 정사영, 가운데는 세 중심을 지나는 평면 β , 오른쪽은 삼각형 AP_3O_2 를 각각 정면에서 본 그림입니다. 서로 다른 평면의 점을 한 평면에 있는 것으로 해석하지 않습니다.

자주 하는 실수

구의 중심 사이 거리와 평면 위 점점 사이 거리를 같다고 놓으면 높이 차가 빠집니다.

제출용 모범답안

중심 간 거리는 반지름의 합인 3,4,5이므로 $[O_1O_2O_3] = 6$ 입니다. 정사영 P_1, P_2, P_3 사이 거리는 높이 차를 빼면 각각 $2\sqrt{2}, 2\sqrt{3}, 2\sqrt{6}$ 입니다. 평면 좌표를 $P_1 = (0, 0), P_2 = (2\sqrt{2}, 0), P_3 = (a, b)$ 로 잡으면 $a^2 + b^2 = 12, (a - 2\sqrt{2})^2 + b^2 = 24$ 에서 $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{\sqrt{46}}{2}$ 로 둘 수 있습니다. 정사영 넓이는 $\sqrt{23}$ 이므로 $\cos \theta = \frac{\sqrt{23}}{6}$ 입니다.

높이 1,2의 비에서 $AO_2 = 2O_1O_2 = 6$ 이고, 높이 2,3의 차에서 $BO_3 = 3O_2O_3$ 입니다. 같은 직선에 대한 높이가 같은 삼각형들의 넓이는 밑변에 비례하므로 $S_1 = 3 \cdot 2 \cdot 6 = 36$ 입니다. 중심 삼각형에서 $\cos \angle O_1O_2O_3 = \frac{3}{5}$ 이므로 $AO_3^2 = 36 + 25 - 60 \cdot \frac{3}{5} = 25$ 이고, $AP_3^2 = 25 - 9 = 16$ 입니다. 또 $O_2P_3^2 = 24 + 4 = 28$ 입니다. 삼각형 AP_3O_2 에서 A의 각의 코사인은 $\frac{16+36-28}{2 \cdot 4 \cdot 6} = \frac{1}{2}$ 이므로 $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$ 입니다. 따라서 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 입니다.

BlueMath 연습용 채점 기준

공간 거리·정사영 넓이 4점, 연장 비· S_1 3점, 세 변· S_2 ·비 3점.

대학 공식 배점·채점 기준이 아니라, 풀이를 점검하기 위한 10점 기준입니다. 맞게 제시한 근거에 해당하는 항목만 인정하며, 같은 실수를 여러 항목에서 반복 감점하지 않습니다.

다시 쓸 판단

서로 접하는 구의 중심 거리에서 높이 차를 피타고라스 정리로 빼면 평면 위 정사영 사이 거리를 구할 수 있습니다.