

가천대학교 의예과

핵심유형 → 워크북 → 기본 재훈련 → UP1 → UP2

수학 I·수학 II·미적분 | 수학 8문항 | 권장 80분

기본 3회 + 기존 UP1 6회 + UP2 3회 = 총 12회

12회는 회차 수입니다. 모든 문항이 신규이거나 서로 다른 것은 아닙니다.

기본 3회는 기존 계열 준비 12문항과 공통 핵심 12문항을

24문항으로 재배열한 실전 재훈련이며 설명을 보강했습니다.

UP2 앞 4문항은 계열 심화, 뒤 4문항은 공통 정확도 점검입니다.

UP2 1회 8번은 기존 UP1 문항 재훈련으로 중복을 표시했습니다.

의예과 한의예·약학의 공통 교재 및 보충편 공통 문항은 겹칩니다.

두 상품을 함께 공부할 때 공통 부분을 중복 학습할 필요는 없습니다.

수학 PDF 교재이며 대학의 제작·승인 교재는 아닙니다.

영상강의, 개인 첨삭, 오프라인 추가자료는 포함하지 않습니다.

01. 원과 평행선의 조건에서 넓이 최적화 · 20점

삼각형 ABC 에서 $AC = 2$ 이고 P 는 AC 의 중점이다. A 를 지나며 BC 와 평행한 직선이 BP 와 만나는 점을 Q , PQ 의 중점을 D 라 하자. Q 는 AC 에 대하여 B 의 반대쪽에 있으며 A, B, C, D 가 한 원 위에 있다. 가능한 BC 의 범위를 구하고, 삼각형 ABC 의 넓이 S 의 최댓값을 구하시오.

풀이·답안 작성

01. 원과 평행선의 조건에서 넓이 최적화 · 20점

삼각형 ABC 에서 $AC = 2$ 이고 P 는 AC 의 중점이다. A 를 지나며 BC 와 평행한 직선이 BP 와 만나는 점을 Q , PQ 의 중점을 D 라 하자. Q 는 AC 에 대하여 B 의 반대쪽에 있으며 A, B, C, D 가 한 원 위에 있다. 가능한 BC 의 범위를 구하고, 삼각형 ABC 의 넓이 S 의 최댓값을 구하시오.

정답

$$\sqrt{2} - 1 < BC < \sqrt{2} + 1, \quad \max S = \sqrt{2}$$

1. 평행선과 원의 조건을 순서대로 사용합니다.

$AP = PC = 1$ 이고 $AQ \parallel CB$ 이므로 삼각형 APQ 와 CPB 는 합동이다. 따라서 $PQ = PB$, $PD = \frac{1}{2}PB$ 이다. 두 현 AC 와 BD 가 P 에서 교차한다. 맞꼭지각이므로 $\angle APB = \angle DPC$ 이고, 같은 호 AD 에 대한 원주각이므로 $\angle ABP = \angle DCP$ 이다. 따라서 삼각형 APB 와 DPC 가 닮음이며 $\frac{AP}{DP} = \frac{BP}{CP}$ 이다. 양변에 $DP \cdot CP$ 를 곱하면 $PA \cdot PC = PB \cdot PD$. 여기에 길이를 대입하면 $1 = \frac{1}{2}PB^2$, 즉 $PB^2 = 2$ 이다.

2. 삼각형 CPB 가 존재하는 범위를 구합니다.

$CP = 1, PB = \sqrt{2}, CB = b$ 이므로 삼각부등식에서 $\sqrt{2} - 1 < b < \sqrt{2} + 1$ 이다. 역으로 이 범위의 b 로 삼각형 CPB 를 만들고 P 에서 C 의 반대쪽으로 길이 1인 PA 를 정하면 평행선 조건과 D 를 정할 수 있다. $PA \cdot PC = PB \cdot PD$ 이므로 A, B, C 를 지나는 원이 직선 PD 와 다시 만나는 점은 D 이며 원 조건도 성립한다. 따라서 이 범위는 충분하다.

3. 코사인법칙으로 넓이를 식으로 나타냅니다.

$\theta = \angle ACB = \angle PCB$ 라 하면 $PB^2 = 1 + b^2 - 2b \cos \theta = 2$ 이다. 따라서 $\cos \theta = \frac{b^2 - 1}{2b}$. 넓이는 $S = b \sin \theta$ 이므로

$$S^2 = b^2 - \frac{(b^2 - 1)^2}{4} = 2 - \frac{(b^2 - 3)^2}{4}.$$

4. 등호가 가능한지 확인합니다.

$S^2 \leq 2$ 이고 등호는 $b = \sqrt{3}$ 에서 성립한다. 이 b 는 앞의 범위에 속하므로 실제 삼각형이 존재한다. 넓이는 양수이므로 최댓값은 $\sqrt{2}$ 이다.

학습용 채점기준

조건 해석과 범위 확인 6점, 핵심 계산과 논리 8점, 충분성 확인과 결론 6점. 동등한 다른 풀이도 근거가 타당하면 같은 점수를 부여합니다.

오류 점검

원 조건을 임의의 그림의 모양으로 대체하지 않습니다. 등호일 때 도형의 존재도 확인합니다.

문항 성격: 제공 모의자료 구조를 참고한 재구성·변형

제공 자료 「27_가천대모의.pdf」의 계열 문항 구조 참고. 공식 기출 원문 수록이 아닌 자체 재구성·변형입니다.