

한양대학교 서울 자연계

실제 문제 + 상세해설 맛보기

한양대 · 핵심유형 FINAL 01 곱의 소거와 서로소 수열

문제 및 제시문: 원본 PDF 3-3쪽

BlueMath_Hanyang_Core12_Questions.pdf

상세해설: 원본 PDF 3-4쪽

BlueMath_Hanyang_Core12_Solutions.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

FINAL 01 · 곱의 소거와 서로소 수열

출처: 2012학년도 한양대학교 수시 오후 · 제시문 1, 논제 1-2·1-3·1-4

수열 $\{A_n\}$ 을 다음과 같이 정의한다.

$$A_n = 2^{2^n} + 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

다음 명제를 생각하자.

[명제 2] $n \neq m$ 이면 A_n 과 A_m 은 서로소이다.

1. [명제 2]가 참일 때 소수들의 총개수를 구하시오.

원문 논제 1-2

2. $A_n - A_0 A_1 \cdots A_{n-1}$ 의 값을 구하시오. 단, $n \geq 1$ 이다.

원문 논제 1-3

3. 앞에서 구한 값을 이용하여 [명제 2]가 참임을 보이시오.

원문 논제 1-4

조건을 식으로 옮기고, 경우 구분과 결론의 근거를 남기세요.

FINAL 01 · 곱의 소거와 서로소 수열

출처: 2012학년도 한양대학교 수시 오후 · 제시문 1, 논제 1-2·1-3·1-4

문제의 조건부터 정확히 읽기

$$A_n = 2^{2^n} + 1$$

은 지수가 두 겹인 식입니다. $2^{2n} + 1$ 과 다릅니다. 실제 앞의 항을 쓰면

$$A_0 = 3, \quad A_1 = 5, \quad A_2 = 17, \quad A_3 = 257$$

입니다. 모든 항은 1보다 큰 홀수입니다. 문제는 모든 A_n 이 소수라는 주장을 요구하지 않습니다. 서로 다른 항들이 공통 소인수를 갖지 않는다는 점을 이용해, 소수가 무한히 많음을 보이는 문제입니다.

1. 명제가 참이면 소수가 왜 무한히 많은가

$A_n > 1$ 이므로 각 A_n 은 적어도 하나의 소인수를 가집니다. 각 항에서 소인수를 하나씩 골라 q_n 이라 합시다. 서로 다른 두 항에서 같은 소인수가 골라졌다면 그 소수가 두 항의 공약수가 됩니다. 이는 두 항이 서로소라는 가정에 어긋납니다.

따라서 $q_0, q_1, q_2, \dots$ 는 모두 서로 다른 소수입니다. 수열의 항이 무한히 많으므로 서로 다른 소수도 무한히 많습니다. 여기까지는 문제에서 [명제 2]가 참이라고 가정한 상태의 풀이입니다. 이어지는 소문항에서는 그 명제 자체를 증명합니다.

2. 앞항들의 곱을 계산하는 이유

앞의 수를 계산해 보면

$$A_0 = 3 = A_1 - 2, \quad A_0 A_1 = 15 = A_2 - 2$$

입니다. 따라서 다음 식을 예상할 수 있습니다.

$$A_0 A_1 \cdots A_{n-1} = 2^{2^n} - 1 = A_n - 2. \quad (1)$$

이 예상은 수학적 귀납법으로 증명합니다. $n = 1$ 일 때 왼쪽은 $A_0 = 3$, 오른쪽은 $2^2 - 1 = 3$ 이므로 성립합니다. $n = k$ 에서 성립한다고 가정하면

$$\begin{aligned} A_0 A_1 \cdots A_k &= (2^{2^k} - 1)(2^{2^k} + 1) \\ &= (2^{2^k})^2 - 1 \\ &= 2^{2^{k+1}} - 1. \end{aligned}$$

마지막 지수 계산에서 $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ 을 사용했습니다. 따라서 (1)은 모든 $n \geq 1$ 에서 성립하고,

$$A_n - A_0 A_1 \cdots A_{n-1} = 2$$

입니다.

3. 공약수가 반드시 1인 이유

$m < n$ 이라 하고 A_m, A_n 의 양의 공약수를 d 라 합시다. d 는 A_m 을 나누므로 A_m 을 인수로 포함하는 $A_0 A_1 \cdots A_{n-1}$ 도 나눕니다. 또한 A_n 도 나누므로 두 수의 차 2를 나눕니다.

그러므로 d 는 1 또는 2입니다. 그런데 A_m, A_n 은 모두 홀수이므로 2는 공약수가 될 수 없습니다. 결국 $d = 1$ 이며 두 항은 서로소입니다. $m \neq n$ 이면 큰 첨자를 n 으로 놓을 수 있으므로 모든 서로 다른 두 항에 대해 결론이 성립합니다.

빠른 풀이와 확인

기억할 핵심식은 $A_0 A_1 \cdots A_{n-1} = A_n - 2$ 하나입니다. 앞항과 뒷항의 공약수가 이 차를 나눈다는 점을 바로 연결하세요. “차가 2이므로 서로소”라고만 쓰면 부족합니다. 두 항이 홀수라는 조건을 써야 공약수 2를 배제할 수 있습니다.

논술 모범답안

[명제 2]가 참이면 각 $A_n > 1$ 에서 소인수를 하나씩 고를 수 있고, 서로 다른 항은 서로소이므로 이 소인수들은 모두 다르다. 따라서 소수는 무한히 많다.

$n = 1$ 에서 $A_0 = 2^2 - 1$ 이고,

$$(2^{2^n} - 1) A_n = 2^{2^{n+1}} - 1$$

이므로 수학적 귀납법에 의하여 $A_0 A_1 \cdots A_{n-1} = 2^{2^n} - 1$ 이다. 따라서 주어진 차는 2이다.

$m < n$ 일 때 A_m, A_n 의 공약수는 $A_n - A_0 A_1 \cdots A_{n-1} = 2$ 를 나눈다. 두 항은 모두 홀수이므로 양의 공약수는 1뿐이다. 따라서 [명제 2]가 성립한다.

학습용 채점기준

점검할 내용	배점
각 항의 소인수를 골라 중복될 수 없음을 설명하여 소수의 무한성을 증명	3
곱의 항등식에 대한 귀납법과 차 2의 계산	4
공약수가 차 2를 나눴을 보이고 홀수 조건으로 2를 배제	3