

한국항공대학교 공학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

2025학년도 공학계열 기출 학습: 문제 1·2 전체

문제 및 제시문: 원본 PDF 2-3쪽

[KAU_Engineering_06_Past_Exam_Study_13_Questions_Corrected.pdf](#)

상세해설: 원본 PDF 2-5쪽

[KAU_Engineering_06_Past_Exam_Study_14_Solutions_Corrected.pdf](#)

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

2025학년도 한국항공대학교 공학계열

편집 원칙

업로드 원문을 기준으로 공학계열 수학 문항을 다시 읽고, 분수·극한·적분·지수·로그·삼각함수 식을 모두 조판 수식으로 다시 작성하였다. 제시문은 풀이에 필요한 수학적 내용은 보존하되 반복 설명은 간결하게 정리하였다.

문제 1 (50점)

제시문 핵심

수열의 대소 비교 정리, 곡선 $y = f(x)$ 의 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선

$$y - f(a) = f'(a)(x - a),$$

그리고 정적분과 정적분의 관계

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$

를 이용할 수 있다.

[문제 1-1] 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 이차함수

$$y = 2x^2 - 5(n+2)x + 3a_n$$

의 그래프는 x 축과 만나고,

$$y = 2x^2 - 5nx + 3a_n$$

의 그래프는 x 축과 만나지 않는다. 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2}.$$

[문제 1-2] $f(x) = (x-5)e^x$ 이다.

- (1) 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(k, f(k))$ 에서의 접선의 방정식을 구하시오.
- (2) f 의 증가와 감소를 표로 나타내고 극값을 구하시오.
- (3) 점 $(a, 0)$ 에서 곡선 $y = f(x)$ 에 서로 다른 두 접선을 그을 수 있도록 하는 a 의 범위를 구하시오.

[문제 1-3] $f(x) = \ln(3x)$ 에 대하여 다음 극한값을 구하시오.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{2}{3n+2k} f\left(3 + \frac{2k}{n}\right).$$

[문제 1-4]

- (1) 함수의 그래프의 개형을 이용하여 $y = \ln x$ 와 $y = \frac{1}{2x}$ 의 교점 개수를 구하시오.
- (2) $t > 0$ 에 대하여

$$F_t(x) = (4t^4 + 3t^2 + 1) \ln(x-t), \quad G_a(x) = 3e^{2x-a}$$

의 그래프가 오직 한 점 A 에서 만나고, A 에서 두 그래프의 접선이 일치하도록 하는 a 를 $h(t)$ 라 하자. $h'(2)$ 를 구하시오.

문제 2 (50점)

제시문 핵심

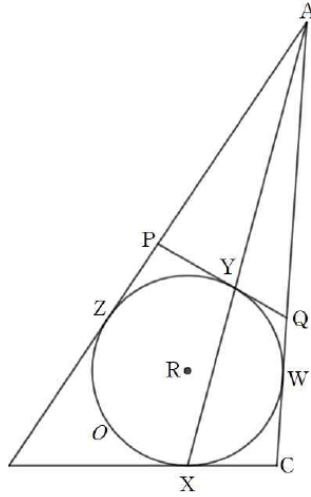
항등식의 미정계수법과 삼각형의 사인법칙·코사인법칙을 이용한다.

[문제 2-1] 최고차항의 계수가 $a \neq 0$ 인 삼차식 $f(x)$ 와 실수 α, β, γ 가

$$\begin{aligned} f(x) - 5x + 6 &= a(x-2)(x-3)(x-\alpha), \\ f(x) - 6x + 8 &= a(x-2)(x-4)(x-\beta), \\ f(x) - 7x + 12 &= a(x-3)(x-4)(x-\gamma) \end{aligned}$$

를 만족한다. $\alpha + \beta + \gamma = 24$ 일 때 $f(0)$ 을 구하시오.

[문제 2-2] 삼각형 ABC 에 내접하는 원의 중심을 R , 접점을 X, W, Z 라 한다. 선분 AX 가 원과 다시 만나는 점을 Y 라 하고, Y 에서의 접선이 AB, AC 와 만나는 점을 각각 P, Q 라 한다. $AP = 3, PB = 3, AC = 5$ 이다.



- (1) $\angle PYX = \angle YXB$ 임을 보이시오.
- (2) 사인법칙을 이용하여 $ZP = 1$ 임을 보이시오.
- (3) 코사인법칙을 이용하여 WQ 를 구하시오.

2025학년도 한국항공대학교 공학계열

원문 검수 · 교정 메모

원자료의 문제 1-1 예시답안 마지막 대소 비교 과정에서 위쪽 경계의 $(n+2)^2$ 가 한 줄에서 $(n+1)^2$ 로 적힌 부분을 확인했다. 문제 조건에서 직접 나오는 상계는 정확히 $\frac{25(n+2)^2}{24}$ 이므로 교정하였다. 극한값 $25/24$ 에는 영향이 없다.

문제 1-1

핵심 발상

두 이차함수의 판별식 부호를 이용해 a_n 을 위아래에서 끼운다.

첫 그래프가 x 축과 만나므로

$$25(n+2)^2 - 24a_n \geq 0 \Rightarrow a_n \leq \frac{25(n+2)^2}{24}.$$

둘째 그래프가 x 축과 만나지 않으므로

$$25n^2 - 24a_n < 0 \Rightarrow a_n > \frac{25n^2}{24}.$$

따라서

$$\frac{25}{24} < \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{25}{24} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2.$$

양끝의 극한이 모두 $25/24$ 이므로 대소 비교 정리에 의해

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = \frac{25}{24}.$$

공식 채점기준 요약

8점: 두 판별식 조건 각 2점, a_n 의 범위 2점, 극한 2점.

Blue Math 연계

수열의 극한 - 대소 비교 정리와 판별식 조건을 결합하는 전형적인 논술형 문항.

문제 1-2

핵심 발상

접점 k 를 미지수로 두고, 점 $(a, 0)$ 을 지나게 하는 조건을 k 에 대한 이차방정식으로 만든다.

(1)

$$f'(x) = (x-4)e^x.$$

따라서 $(k, (k-5)e^k)$ 에서의 접선은

$$y = (k-4)e^k(x-k) + (k-5)e^k.$$

(2) $e^x > 0$ 이므로 $f'(x)$ 의 부호는 $x-4$ 의 부호와 같다. 따라서 $x < 4$ 에서 감소, $x > 4$ 에서 증가하며

$$x = 4 \text{에서 극솟값 } -e^4$$

을 갖는다.

(3) 접선이 $(a, 0)$ 을 지나면

$$0 = (k-4)e^k(a-k) + (k-5)e^k.$$

$e^k \neq 0$ 이므로 정리하면

$$k^2 - (a+5)k + 4a + 5 = 0.$$

서로 다른 두 접선이 존재하려면 이 방정식이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

$$D = (a + 5)^2 - 4(4a + 5) = a^2 - 6a + 5 = (a - 1)(a - 5) > 0.$$

따라서

$$a < 1 \quad \text{또는} \quad a > 5.$$

공식 채점기준 요약

10점: 접선 3점, 증감·극값 3점, 접선 두 개 조건 4점.

Blue Math 연계

미분 본교재 - 접선의 방정식, 함수의 증감, 한 점에서 그을 수 있는 접선의 개수.

문제 1-3

핵심 발상

$\frac{2}{3n+2k} = \frac{1}{3+2k/n} \frac{2}{n}$ 로 바꾸면 정적분이 바로 보인다.

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{3n+2k} f\left(3 + \frac{2k}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k)}{x_k} \Delta x,$$

여기서

$$x_k = 3 + \frac{2k}{n}, \quad \Delta x = \frac{2}{n}.$$

따라서 극한은

$$\int_3^5 \frac{\ln(3x)}{x} dx.$$

$u = \ln(3x)$ 라 두면 $du = dx/x$ 이므로

$$\int_{\ln 9}^{\ln 15} u du = \frac{(\ln 15)^2 - (\ln 9)^2}{2}.$$

공식 채점기준 요약

14점: 정적분 변형 4점, 적분 설정 5점, 치환·계산 5점.

Blue Math 연계

적분 본교재 - 정적분과 급수의 합, 로그함수 치환적분.

문제 1-4

핵심 발상

공통 접점에서는 함수값과 미분값이 동시에 같아야 한다. 두 조건을 나누면 $\ln u = 1/(2u)$ 가 등장한다.

(1)

$$q(x) = \ln x - \frac{1}{2x} \quad (x > 0)$$

라 두면

$$q'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} > 0.$$

또 $q(x) \rightarrow -\infty$ ($x \rightarrow 0^+$), $q(x) \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$)이므로 교점은 정확히 하나이다.

(2) 그 유일한 해를 α 라 하자. 즉

$$\ln \alpha = \frac{1}{2\alpha}.$$

공통 접점의 x 좌표를 k 라 하면

$$(4t^4 + 3t^2 + 1) \ln(k - t) = 3e^{2k-a},$$

$$\frac{4t^4 + 3t^2 + 1}{k - t} = 6e^{2k-a}.$$

두 식을 나누면

$$\ln(k - t) = \frac{1}{2(k - t)}.$$

유일성에 의해 $k - t = \alpha$, 즉 $k = t + \alpha$ 이다. 두 번째 식에 대입하여

$$a = h(t) = 2(t + \alpha) - \ln\left(\frac{4t^4 + 3t^2 + 1}{6\alpha}\right).$$

따라서

$$h'(t) = 2 - \frac{16t^3 + 6t}{4t^4 + 3t^2 + 1}.$$

$t = 2$ 를 넣으면

$$h'(2) = 2 - \frac{140}{77} = \boxed{\frac{2}{11}}.$$

공식 채점기준 요약

18점: 교점 개수 5점, 공통접선 조건 6점, $h(t)$ 도출 4점, 미분값 3점.

Blue Math 연계

미분 본교재 - 공통접선, 로그·지수함수 미분, 매개변수로 정의된 함수의 미분.

문제 2-1

세 식에 각각 $x = 2, 3, 4$ 를 대입하면

$$f(2) = 4, \quad f(3) = 9, \quad f(4) = 16.$$

따라서

$$f(x) = a(x - 2)(x - 3)(x - 4) + x^2.$$

첫째 식에 $x = 4$, 둘째 식에 $x = 3$, 셋째 식에 $x = 2$ 를 대입하면

$$\alpha = 4 - \frac{1}{a}, \quad \beta = 3 - \frac{1}{a}, \quad \gamma = 2 - \frac{1}{a}.$$

합이 24이므로

$$9 - \frac{3}{a} = 24 \Rightarrow a = -\frac{1}{5}.$$

따라서

$$f(0) = a(-2)(-3)(-4) = \boxed{\frac{24}{5}}.$$

공식 채점기준 요약

21점: 함수값 3점, α, β, γ 각 3점, a 5점, $f(0)$ 4점.

문제 2-2

핵심 발상

접점에서 같은 점에서 그은 두 접선의 길이가 같다는 성질과 사인법칙·코사인법칙을 순서대로 쓴다.

(1) $RY \perp PY$, $RX \perp BX$ 이고 $RY = RX$ 이므로 $\triangle RYX$ 는 이등변삼각형이다. 따라서 $\angle RYX = \angle RXY$. 두 직각을 이용해 여각을 비교하면

$$\angle PYX = \angle YXB.$$

(2) 한 점 P 에서 원에 그은 접선이므로 $PZ = PY = x$ 라 하자. 또한 $BZ = BX = PB - PZ = 3 - x$. 삼각형 APY , AXB 에 사인법칙을 적용하고 (1)의 각 관계를 쓰면

$$\frac{PA}{PY} = \frac{AB}{BX}.$$

즉

$$\frac{3}{x} = \frac{6}{3-x} \Rightarrow x = 1.$$

따라서 $ZP = 1$.

(3) $ZB = 2 = BX$, $AZ = 4 = AW$, 따라서 $WC = 1 = XC$ 이고 $BC = 3$ 이다. $WQ = YQ = y$ 라 두면

$$PQ = 1 + y, \quad AQ = 4 - y.$$

삼각형 ABC 에서

$$\cos A = \frac{6^2 + 5^2 - 3^2}{2 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{13}{15}.$$

삼각형 APQ 에서

$$\cos A = \frac{3^2 + (4-y)^2 - (1+y)^2}{2 \cdot 3(4-y)} = \frac{12-5y}{12-3y}.$$

두 식을 같게 두면 $y = 2/3$.

정답

(1) 증명 위와 같음, (2) $ZP = 1$, (3) $WQ = \frac{2}{3}$.

공식 채점기준 요약

29점: (1) 3점, (2) 사인법칙·접선 길이까지 10점, (3) 코사인법칙과 최종값 16점.

Blue Math 연계

기하/삼각형 - 원의 접선, 사인법칙·코사인법칙, 접선 길이의 성질.