

동덕여자대학교 자연계 수학

실제 문제 + 상세해설 맛보기

핵심유형 CORE 01 절댓값 합성함수의 그래프와 근의 합

문제 및 제시문: 원본 PDF 6-6쪽

Dongduk_2027_Core12_Q.pdf

상세해설: 원본 PDF 7-9쪽

Dongduk_2027_Core12_A.pdf

판매 통합본에 포함된 원본 페이지를 그대로 발췌했습니다.

문제와 필요한 제시문, 대응 상세해설을 함께 제공합니다.

전체 자료가 아닌 일부 발췌본입니다.

대학이 제작하거나 승인한 교재가 아닙니다.

CORE 01

절댓값 합성함수의 그래프와 근의 합

수학 · 함수와 그래프 | 필수 | 권장 10분

출처: D · 자연계열 문제 1 · 첨부 PDF 1쪽 / 공식 가이드북 34쪽(파일 38쪽)

두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 닫힌구간 $[0, 1]$ 에서 다음과 같이 정의될 때, 아래 물음에 답하시오.

$$f(x) = -|2x - 1| + 1, \quad g(x) = -|2f(x) - 1| + 1.$$

- (1) x 축과 함수 $y = f(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [7점]
- (2) $0 < b < 1$ 일 때, 방정식 $g(x) = b$ 를 만족시키는 근의 개수를 구하는 과정을 서술하시오. [12점]
- (3) $0 < b < 1$ 일 때, 방정식 $g(x) = b$ 를 만족시키는 모든 근의 합을 구하시오. [6점]

정답 (1) $\frac{1}{2}$ (2) 4개 (3) 2

문제 읽기 · 어디서 시작할까요?

이 문제는 절댓값을 두 번 연속으로 적용합니다. 먼저 f 의 그래프를 완성한 뒤, 그 함수값을 다시 절댓값 안에 넣어 g 를 만듭니다. g 의 식이 바뀌는 기준은 $2f(x) - 1 = 0$, 즉 $f(x) = \frac{1}{2}$ 입니다. 처음부터 $x = \frac{1}{2}$ 에서만 나누면 g 의 두 꼭짓점을 놓칩니다.

먼저 확인할 개념

절댓값은 안쪽이 음수일 때 부호를 바꾸고, 양수일 때 그대로 둡니다.

$$|u| = \begin{cases} -u & (u < 0), \\ u & (u \geq 0). \end{cases}$$

방정식 $g(x) = b$ 의 서로 다른 실근 개수는 그래프 $y = g(x)$ 와 수평선 $y = b$ 의 교점 개수와 같습니다. 대칭축이 $x = c$ 인 그래프에서는 대칭인 두 근의 합이 $2c$ 입니다.

강의식 단계 풀이

STEP 1. 먼저 f 를 두 구간으로 나눕니다

$2x - 1$ 의 부호는 $x = \frac{1}{2}$ 에서 바뀝니다. 따라서

$$f(x) = \begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 2 - 2x & (\frac{1}{2} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

두 식은 경계에서 모두 1이므로 경계를 양쪽 식에 표시해도 함수값은 일치합니다. 그래프는 $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 0)$ 을 잇는 두 선분입니다. 밑변의 길이와 높이가 모두 1인 삼각형이므로

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

STEP 2. $f(x) = \frac{1}{2}$ 가 되는 위치를 찾습니다

왼쪽 구간에서는 $2x = \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{1}{4}$, 오른쪽 구간에서는 $2 - 2x = \frac{1}{2}$ 이므로 $x = \frac{3}{4}$ 입니다. 그러므로 g 에서는 $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 가 모두 구간 분할점입니다.

$$g(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x \leq \frac{1}{4}), \\ 2 - 4x & (\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 4x - 2 & (\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}), \\ 4 - 4x & (\frac{3}{4} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

예를 들어 $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$ 에서는 $f(x) = 2 - 2x \geq \frac{1}{2}$ 이므로 $g(x) = -2f(x) + 2 = 4x - 2$ 입니다. 이 한 구간을 직접 확인하면 합성 과정의 부호 실수를 줄일 수 있습니다.

STEP 3. 각 구간에서 근을 하나씩 확인합니다

$0 < b < 1$ 이므로 네 선분 각각의 내부에서 $y = b$ 와 한 번씩 만납니다. 실제로 네 근은

$$x_1 = \frac{b}{4}, \quad x_2 = \frac{2-b}{4}, \quad x_3 = \frac{2+b}{4}, \quad x_4 = \frac{4-b}{4}.$$

첫째 근은 $(0, \frac{1}{4})$, 둘째 근은 $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2})$, 셋째 근은 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$, 넷째 근은 $(\frac{3}{4}, 1)$ 에 있습니다. 서로 다른 네 구간의 내부에 있으므로 중복이 없습니다. 따라서 근은 $\boxed{4}$ 개입니다.

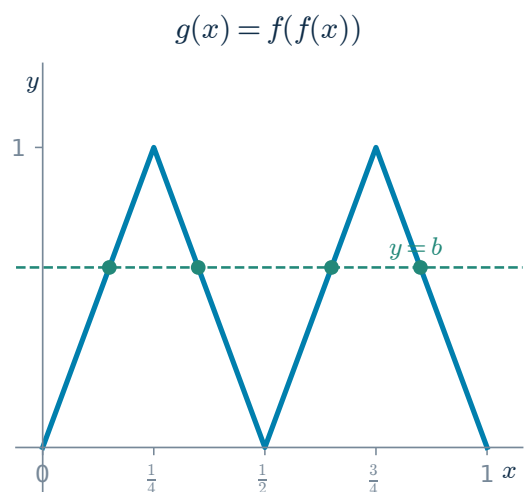
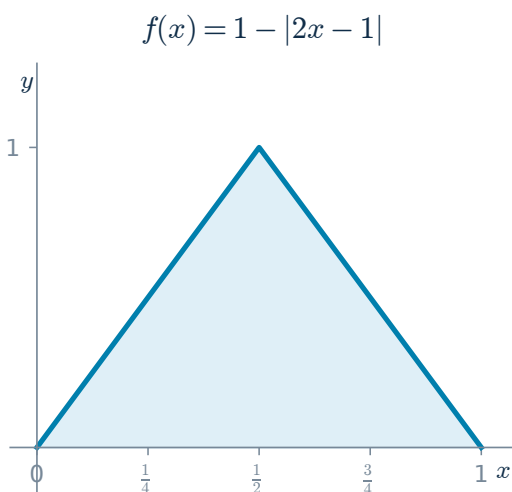
STEP 4. 네 근의 합과 대칭성을 함께 확인합니다

분모가 모두 4이므로

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = \frac{b + (2-b) + (2+b) + (4-b)}{4} = \boxed{2}.$$

그래프로도 $x_1 + x_4 = 1, x_2 + x_3 = 1$ 임을 확인할 수 있습니다. 대칭축이 $x = \frac{1}{2}$ 이므로 두 대칭쌍의 합은 각각 1입니다. 단, 먼저 근이 정확히 네 개임을 확인한 뒤 대칭성을 적용해야 합니다.

그림으로 확인



왼쪽은 f 와 x 축 사이의 삼각형입니다. 오른쪽 점선은 $b = 0.6$ 인 예시이며, $0 < b < 1$ 인 모든 수평선에서 네 교점 구조가 같습니다.

질문이 남는 지점 · 실수 점검

$b = 0$ 이나 $b = 1$ 도 네 근인가요?

아닙니다. $b = 0$ 에서는 $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ 의 세 근, $b = 1$ 에서는 $x = \frac{1}{4}, \frac{3}{4}$ 의 두 근입니다. 그래서 $0 < b < 1$ 이라는 조건을 반드시 사용해야 합니다.

그림만 그리고 “4개”라고 써도 되나요?

공식 채점기준에는 구간별 $g(x)$ 를 구하는 과정 8점과 근의 개수 4점이 구분되어 있습니다. 네 구간의 식이나 그에 해당하는 명확한 설명을 함께 남기는 것이 좋습니다.

실전 숏컷

$f(1-x) = f(x)$ 이므로 $g(1-x) = g(x)$ 입니다. $g(x) = b$ 의 근이 네 개인 것을 확인하면, 대칭인 두 근씩 묶어 합을 $1 + 1 = 2$ 로 바로 계산할 수 있습니다.

제출용 모범답안

$f(x)$ 는 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 에서 $2x$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ 에서 $2 - 2x$ 이므로 넓이는 $\frac{1}{2}$ 이다. 또한

$$g(x) = \begin{cases} 4x & (0 \leq x \leq \frac{1}{4}), \\ 2 - 4x & (\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}), \\ 4x - 2 & (\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}), \\ 4 - 4x & (\frac{3}{4} \leq x \leq 1). \end{cases}$$

$0 < b < 1$ 에서 각 구간 내부에 근이 하나씩 있어 네 근이다. 네 근은 $x = \frac{1}{2}$ 에 대하여 두 쌍으로 대칭이므로 모든 근의 합은 2이다.

공식 예시 배점 · 기준 요약

채점 요소	배점
(1) 그래프 또는 구간별 식에서 삼각형의 넓이 산출	7점
(2) 네 구간의 $g(x)$ 표현	8점
(2) 근의 개수 4개 판정	4점
(3) 모든 근의 합 2	6점

교재연계 『Blue Math BIS Season2 공통』 개념 연계: 절댓값 함수·합성함수·그래프 (단원 기준). 이 책 WORKBOOK 06·10에서 수평선과 그래프의 교점 개수를 다시 연습합니다.