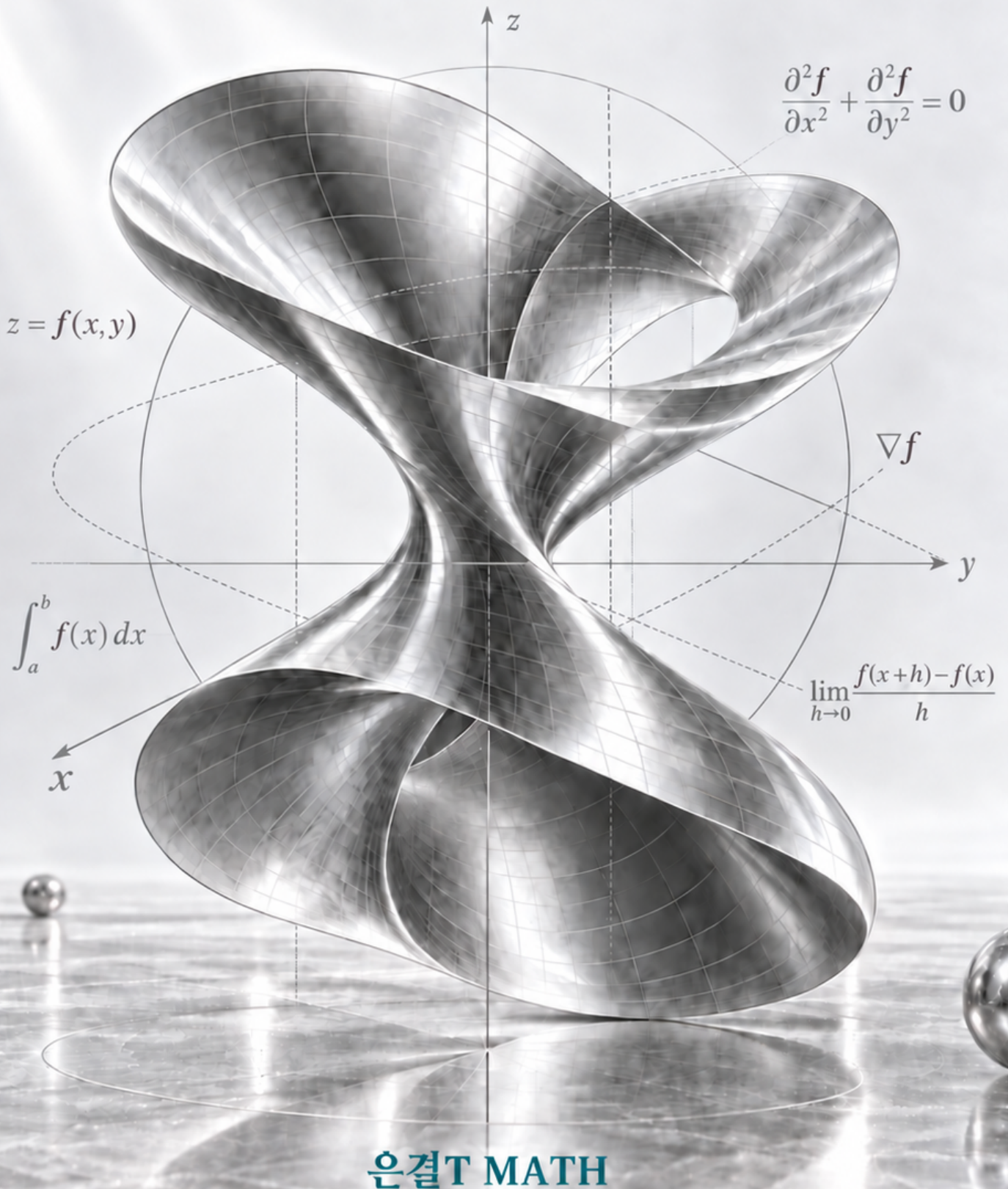


기하 총정리

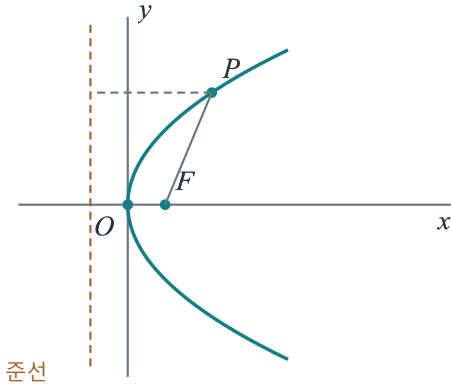


I. 이차곡선

01 포물선

같은 거리라는 정의에서 초점·준선·방정식을 연결한다.

1. 정의와 기본형



한 점 F 와 한 직선 l 까지의 거리가 같은 점 P 의 자취가 포물선이다.
 F 는 초점, l 은 준선이다. 초점을 지나 준선에 수직인 직선이 축이다.
 $PF = d(P, l)$

$$y^2 = 4px \Rightarrow F(p, 0), \quad l: x = -p$$

$$x^2 = 4py \Rightarrow F(0, p), \quad l: y = -p$$

두 식 모두 꼭짓점은 원점이고, 꼭짓점에서 초점까지의 거리는 $|p|$ 이다. p 는 0이 아니며, 부호에 따라 열리는 방향이 달라진다.

2. 평행이동은 꼭짓점을 먼저

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

꼭짓점 (h, k) , 초점 $(h + p, k)$, 준선 $x = h - p$.

세로로 열린 식 $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ 는 초점 $(h, k + p)$, 준선 $y = k - p$ 이다.

바로 적용

$(y - 2)^2 = 8(x + 1)$ 의 꼭짓점, 초점, 준선은?

풀이 $h = -1, k = 2, p = 2$ 이므로 꼭짓점 $(-1, 2)$, 초점 $(1, 2)$, 준선 $x = -3$.

조건 체크 제공되지 않은 문자가 x 이면 좌우, y 이면 위아래로 열린다. 준선이 $x =$ 상수인지 $y =$ 상수인지 반드시 확인한다.

I. 이차곡선

02 포물선의 접선

미분 없이 판별식으로 접선을 구하고, 수직 접선도 따로 확인한다.

1. 기울기가 주어진 접선

$$y^2 = 4px : y = mx + \frac{p}{m} \quad (m \neq 0)$$

$$x^2 = 4py : y = mx - pm^2$$

첫째 식에서 $y = mx + n$ 을 대입하면 다음 이차방정식을 얻는다.

$$m^2x^2 + (2mn - 4p)x + n^2 = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow mn = p$$

조건 체크 $y^2 = 4px$ 의 꼭짓점에서 접선은 $x = 0$ 이다. $y = mx + n$ 형태로 나타낼 수 없으므로 따로 포함한다.
 $x^2 = 4py$ 에서는 꼭짓점 접선이 $y = 0$ 이다.

2. 곡선 위의 점에서 그은 접선

$$y^2 = 4px : yy_1 = 2p(x + x_1)$$

$$x^2 = 4py : xx_1 = 2p(y + y_1)$$

접점 (x_1, y_1) 이 원래 포물선 위에 있는지 먼저 확인한다. 접점 공식은 꼭짓점의 접선에도 그대로 적용된다.

바로 적용

포물선 $y^2 = 8x$ 위의 점 $(2, 4)$ 에서의 접선을 구하자.

풀이 $p = 2$ 이므로 $4y = 4(x + 2)$. 따라서 접선은 $y = x + 2$ 이다.

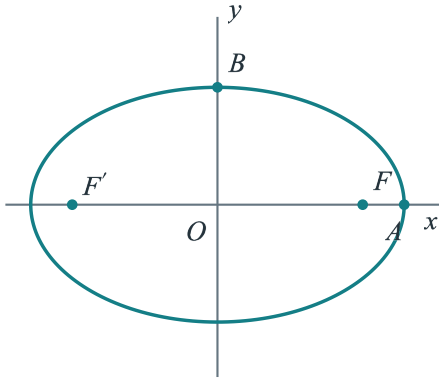
스스로 확인 $y^2 = 4x$ 에서 기울기가 2인 접선은 $y = 2x + \frac{1}{2}$. 대입했을 때 중근이 생기지도 확인해 보자.

I. 이차곡선

03 타원

두 초점까지 거리의 합, 긴 축, 초점거리의 관계를 묶어 기억한다.

1. 정의와 표준형



두 초점 F, F' 까지 거리의 합이 일정한 점 P 의 자취이다.

거리의 합 $2a$ 는 두 초점 사이의 거리 $2c$ 보다 커야 한다.

$$PF + PF' = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0), \quad c^2 = a^2 - b^2$$

중심 $(0, 0)$, 초점 $(\pm c, 0)$, 장축의 길이 $2a$, 단축의 길이 $2b$.

꼭짓점은 $(\pm a, 0), (0, \pm b)$ 이다.

2. 축이 바뀌거나 중심이 이동하면

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

중심은 (h, k) , 초점은 $(h \pm c, k)$ 이다. y^2 의 분모가 더 크면 장축은 세로 방향이고, 초점도 중심에서 위아래로 놓인다.

바로 적용

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \text{의 초점과 두 초점까지 거리의 합은?}$$

풀이 장축이 y 축 위에 있다. $c^2 = 25 - 9 = 16$ 이므로 초점 $(0, \pm 4)$, 거리의 합은 10이다.

조건 체크 a 를 무조건 x^2 의 분모에서 읽지 않는다. 이 책에서 a 는 장반경이다. 먼저 두 분모 중 큰 값을 찾는다.

I. 이차곡선

04 타원의 접선과 활용

공식은 간단하게, 실제 적용은 조건과 함께.

1. 접선의 두 형태

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 : y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1 \quad \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \right)$$

기울기 공식은 $y = mx + n$ 을 대입한 이차방정식의 판별식을 0으로 두어 얻는다. 수직 접선은 $x = \pm a$ 이고, 접점 공식에는 이 경우도 포함된다.

바로 적용

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \text{ 위의 점 } (4, \frac{9}{5}) \text{에서의 접선은?}$$

$$\text{풀이 } \frac{4x}{25} + \frac{y}{5} = 1 \text{ 이므로 } 4x + 5y = 25. \text{ 접점이 타원 위에 있는지도 } \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1 \text{로 확인한다.}$$

2. 좌표를 하나의 각으로 표현하기 · 활용

$$P(a\cos t, b\sin t) \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

이 좌표를 표준형에 대입하면 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 이 된다. t 는 일반적으로 선분 OP 가 x 축과 이루는 각과 같지 않다.

3. 정의를 쓰는 거리 문제

타원 위에서 PF 를 알고 있다면 $PF' = 2a - PF$ 이다. 두 거리의 합이 보이면 좌표 계산을 시작하기 전에 정의로 바꿀 수 있는지 확인한다.

$$PF = 3, \quad 2a = 10 \quad \Rightarrow \quad PF' = 7$$

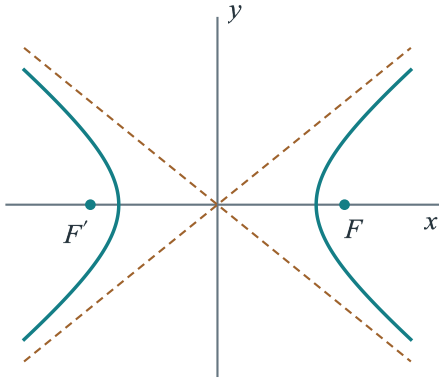
학습 포인트 삼각치환은 표준형으로부터 얻는 활용 도구이다. 독립된 암기 공식으로 늘리기보다 대입해서 성립함을 확인하자.

I. 이차곡선

05 쌍곡선

거리의 차에는 절댓값, 초점거리에는 덧셈이 들어간다.

1. 정의와 표준형



두 초점까지 거리의 차의 절댓값이 일정한 점의 자취이다.

$0 < 2a < 2c$ 이며, 두 갈래를 모두 포함한다.

$$|PF - PF'| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c^2 = a^2 + b^2 \quad (a, b > 0)$$

중심 $(0, 0)$, 꼭짓점 $(\pm a, 0)$, 초점 $(\pm c, 0)$.

양수 항에 x^2 이 있으면 좌우로, y^2 이 있으면 위아래로 열린다.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 : y = \pm \frac{b}{a}x$$

2. 중심이 평행이동한 경우

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$F(h \pm c, k), \quad y - k = \pm \frac{b}{a}(x - h)$$

바로 적용

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \text{의 초점과 점근선은?}$$

풀이 $c^2 = 9 + 16 = 25$ 이므로 초점 $(\pm 5, 0)$, 점근선 $y = \pm \frac{4}{3}x$ 이다.

조건 체크 타원은 $c^2 = a^2 - b^2$, 쌍곡선은 $c^2 = a^2 + b^2$. 쌍곡선에서 a 와 b 의 대소관계는 정해져 있지 않다.