이동훈 기출문제집

기하 편 문제집

저자 소개

이동훈

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 콘텐츠 개발자
이동훈 기출문제집 네이버 카페 활동 중 (닉네임: 이동훈t)
cafe.naver.com/2math

서 문

★ 스포일러: 2026 학년도 수능 수학 푼 사람만 읽으세요 !

2026 수능에서 보여준 출제 경향

〈 공통(수학1+수학2) 〉

공통 14 : 삼각비의 정의, 피타고라스의 정의, 코사인법칙, 사인법칙을 모두 사용해야 하는 문제. '한 각을 공유하는 두 개의 삼각형' 에 대한 실전 개념을 적용할 수 있는지를 평가함.

공통 15 : 정적분으로 주어진 함수의 미분가능성, 합/차로 만들어진 함수, 이차방정식의 근의 분리(대칭축/경계값/판별식)이 물리적으로 결합 된 매우 전형적인 문제. 이차방정식의 근의 분리는 매해 출제된다고 봐도 좋다.

공통 21 : 구간 별로 달리 정의된 함수의 그래프 개형과 연속성, 함수의 극한 계산에서 귀류법, 미분계수의 해석, 삼차함수의 그래프의 개형(곡선이 지나는 점/곡선 위의 점에서의 접선의 기울기)가 물리적으로 결합 된 문제. 크게 두 가지의 풀이가 가능한데.
[풀이1] 함수 $g(x)$의 그래프의 개형 만을 이용.
[풀이2] 두 함수 $g(x)$, $\dfrac{g(x)}{x(x-2)}$의 그래프의 개형을 모두 이용.
아마도 전자의 풀이가 출제 의도일 듯.

공통 22 : 두 곡선의 위치 관계(평행이동/대칭이동/확대축소), 점의 이동/곡선의 이동(이 둘을 동시에 생각.)이 결합된 문제. '지수함수/로그함수를 포함한 두 곡선의 위치 관계를 파악할 때, 두 함수의 밑이 다르면 평행이동, 대칭이동 해도 일치하지 않으니 그래프의 개형에서 더 이상 의미있는 풀이가 힘들다.' 라는 생각을 저격한 것으로 보임. 두 곡선의 위치 관계를 따질때에는 확대축소까지 생각해야 함.

〈 기하 〉

기하 27 : 삼수선의 정리, 사다리꼴의 성질, 정사영의 길이/넓이에 대한 정의와 공식, 원의 성질이 물리적으로 결합 된 문제.

기하 28 : 사면체의 단면 관찰, 정삼각형의 성질, 구 밖의 점에서 그은 접선(자취), 두 평면의 위치 관계(평행), 정사영의 길이/넓이에 대한 정의와 공식이 물리적으로 결합 된 문제. 기하 27번과 마찬가지로 매우 전형적.

기하 29 : 두 이차곡선의 한 초점을 일치시킨 상황(포물선, 타원), 이차곡선의 정의, 직각삼각형(피타고라스의 정리), 삼각형의 둘레의 길이/넓이가 물리적으로 결합 된 문제. 반드시 그려야 하는 보조선이 바로 보여야 함.

기하 30 : 벡터의 내적의 정의(기하, 평행이동), 벡터의 내적의 성질, 원의 성질(직각)이 물리적으로 결합 된 전형적인 문제.

수능 수학 1등급/만점을 결정하는 난문을 해결하기 위해서는 '교과서와 수능/평가원 기출 더 나아가 교육청/사관학교/경찰대 기출에 대한 철저한 학습이 절실하게 요구' 됩니다.
수능 수학에 대한 자세한 분석과 그에 따른 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페 (cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

이동훈

학년도	시험	실시년도/월	학년도	시험	실시년도/월
5차 교육과정			2012	모의평가(9월)	2011년 9월
1991	실험평가(1차)	1990년 12월	2012	대학수학능력	2011년 11월
1992	실험평가(2차)	1991년 5월	2014	예비시행(2009개정)	2012년 5월
1992	실험평가(3차)	1991년 8월	2013	모의평가(6월)	2012년 6월
1992	실험평가(4차)	1991년 11월	2013	모의평가(9월)	2012년 9월
1993	실험평가(5차)	1992년 5월	2013	대학수학능력	2012년 11월
1993	실험평가(6차)	1992년 8월	2014	모의평가(6월)	2013년 6월
1993	실험평가(7차)	1992년 11월	2014	모의평가(9월)	2013년 9월
1994	대학수학능력(1차)	1993년 8월	2014	대학수학능력	2013년 11월
1994	대학수학능력(2차)	1993년 11월	2015	모의평가(6월)	2014년 6월
1995	대학수학능력	1994년 11월	2015	모의평가(9월)	2014년 9월
1996	대학수학능력	1995년 11월	2015	대학수학능력	2014년 11월
1997	대학수학능력	1996년 11월	2016	모의평가(6월)	2015년 6월
1998	대학수학능력	1997년 11월	2016	모의평가(9월)	2015년 9월
6차 교육과정			2016	대학수학능력	2015년 11월
1999	대학수학능력	1998년 11월	2009개정 교육과정		
2000	대학수학능력	1999년 11월	2017	모의평가(6월)	2016년 6월
2001	대학수학능력	2000년 11월	2017	모의평가(9월)	2016년 9월
2002	대학수학능력	2001년 11월	2017	대학수학능력	2016년 11월
2003	모의평가(9월)	2002년 9월	2018	모의평가(6월)	2017년 6월
2003	대학수학능력	2002년 11월	2018	모의평가(9월)	2017년 9월
2004	모의평가(6월)	2003년 6월	2018	대학수학능력	2017년 11월
2004	모의평가(9월)	2003년 9월	2019	모의평가(6월)	2018년 6월
2004	대학수학능력	2003년 11월	2019	모의평가(9월)	2018년 9월
7차 교육과정			2019	대학수학능력	2018년 11월
2005	예비시행	2003년 12월	2020	모의평가(6월)	2019년 6월
2005	모의평가(6월)	2004년 6월	2020	모의평가(9월)	2019년 9월
2005	모의평가(9월)	2004년 9월	2020	대학수학능력	2019년 11월
2005	대학수학능력	2004년 11월	2015개정 교육과정		
2006	모의평가(6월)	2005년 6월	2021	예시문항	2020년 5월
2006	모의평가(9월)	2005년 9월	2021	모의평가(6월)	2020년 6월
2006	대학수학능력	2005년 11월	2021	모의평가(9월)	2020년 9월
2007	모의평가(6월)	2006년 6월	2021	대학수학능력	2020년 11월
2007	모의평가(9월)	2006년 9월	2022	모의평가(6월)	2021년 6월
2007	대학수학능력	2006년 11월	2022	모의평가(9월)	2021년 9월
2008	모의평가(6월)	2007년 6월	2022	대학수학능력	2021년 11월
2008	모의평가(9월)	2007년 9월	2023	모의평가(6월)	2022년 6월
2008	대학수학능력	2007년 11월	2023	모의평가(9월)	2022년 9월
2009	모의평가(6월)	2008년 6월	2023	대학수학능력	2022년 11월
2009	모의평가(9월)	2008년 9월	2024	모의평가(6월)	2023년 6월
2009	대학수학능력	2008년 11월	2024	모의평가(9월)	2023년 9월
2010	모의평가(6월)	2009년 6월	2024	대학수학능력	2023년 11월
2010	모의평가(9월)	2009년 9월	2025	모의평가(6월)	2024년 6월
2010	대학수학능력	2009년 11월	2025	모의평가(9월)	2024년 9월
2011	모의평가(6월)	2010년 6월	2025	대학수학능력	2024년 11월
2011	모의평가(9월)	2010년 9월	2028	예시문항(2022개정)	2025년 4월
2011	대학수학능력	2010년 11월	2026	모의평가(6월)	2025년 6월
2007개정 교육과정			2026	모의평가(9월)	2025년 9월
2012	모의평가(6월)	2011년 6월	2026	대학수학능력	2025년 11월

○ 문항 정렬은 단원별, 출제년도 순을 따랐습니다.
소단원별의 문항 구성은 교과서의 서술 체계를 가장 잘 드러내며, 출제년도 순의 문항 구성은 출제 경향을 뚜렷하게 보여줄 것입니다.

○ 모든 해설은 교과서에 근거합니다.
해설은 교과서의 정의/정리/성질/공식/법칙과 수학적 표현만으로 작성되었으며, 수학적으로 엄밀합니다.
다른 풀이 및 참고 사항을 최대한 수록하여 문제 해결의 다양한 시각을 제시하였습니다.

기호

〈 문제집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 수준별 문항 구분은 다음과 같습니다.

○ : 교과서 예제 수준
○○ : 교과서 연습문제 수준
○○○ : 비킬러(중에서 난이도 상)
●●● : 준킬러 (실전개념 필요성 비교적 높음)
★★★ : 킬러 (실전개념 필요성 매우 강함)

각 단계에 대한 학습법은 이동훈 기출 네이버 카페(cafe.naver.com/2math)에서 읽으실 수 있습니다.

▸ 문제집 본문에서 '문제 풀이에 직접적으로 도움이 되는 주제명' 은 빈 상자로 두었습니다.

A. 지수함수의 그래프

주제:

빈 상자로 처리된 주제명은 각 단원의 시작 페이지의 맨 아래에 적어두었습니다.

〈 해설집의 기호에 대하여 〉

이동훈 기출문제집의 해설집에는 다음의 세 방향의 풀이를 모두 수록하기 위하여 노력하였습니다.

(A) 교과서의 '기본개념' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(B) 교과서와 수능/평가원 기출문제에서 추론가능 한 '실전이론' 과 그에 따른 전형적인 풀이 과정을 적용하는 풀이
(C) 시험장에서 손끝에서 나와야 하는 풀이 (이에 해당하는 풀이에는 시험장 표시를 해두었습니다.)

모든 [풀이] 또는 [풀이1]은 출제 의도에 가장 가깝고, 빠른 풀이입니다.
<u>따라서 [풀이] 또는 [풀이1]만을 읽어도 학습에 아무런 지장이 없습니다.</u>

만약 어떤 문제의 어느 해설에도 시험장 표시가 없다면 [풀이] 또는 [풀이1]이 시험장 풀이입니다.

목 차

기하

단원별 알파벳구성

과목	대단원	알파벳	과목	대단원	알파벳
수학 Ⅰ	지수함수와 로그함수	A	기하	이차곡선	M
	삼각함수	B		평면벡터	N
	수열	C		공간도형과 공간좌표	P
수학 Ⅱ	함수의 극한과 연속	D	수학	다항식	Q
	미분	E		방정식과 부등식	R
	적분	F		도형의 방정식	S
미적분	수열의 극한	G		집합과 명제	T
	미분법	H		함수	U
	적분법	I		순열과 조합	V
확률과 통계	경우의 수	J	교육과정 外		Z
	확률	K			
	통계	L			

P. 삼수선: 최대최소

P011

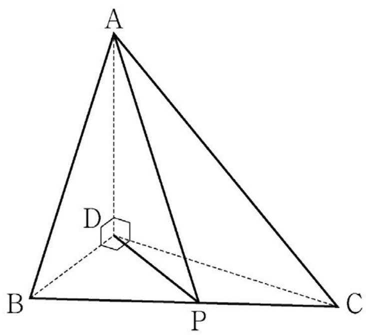
○○
(2022(9)−기하27)

그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DB}=2$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$이고

$\angle ADB=\angle ADC=\angle BDC=\dfrac{\pi}{2}$인

사면체가 ABCD가 있다.

선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{DP}$의 최솟값은? [3점]



① $3\sqrt{3}$ ② $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\dfrac{11\sqrt{3}}{3}$

④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\dfrac{13\sqrt{3}}{3}$

P012

○○○
(2008−가형23)

좌표공간에 네 점 $A(2,\ 0,\ 0)$, $B(0,\ 1,\ 0)$, $C(-3,\ 0,\ 0)$, $D(0,\ 0,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD가 있다. 모서리 BD 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$의 값을 최소로 하는 점 P의 좌표를

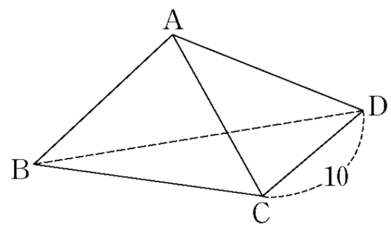
$(a,\ b,\ c)$라고 할 때, $a+b+c=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

P. 이면각

P013

○○
(2010(9)−가형5)

사면체 ABCD에서 모서리 CD의 길이는 10, 면 ACD의 넓이는 40이고, 면 BCD와 면 ACD가 이루는 각의 크기는 30°이다. 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 선분 AH의 길이는? [3점]



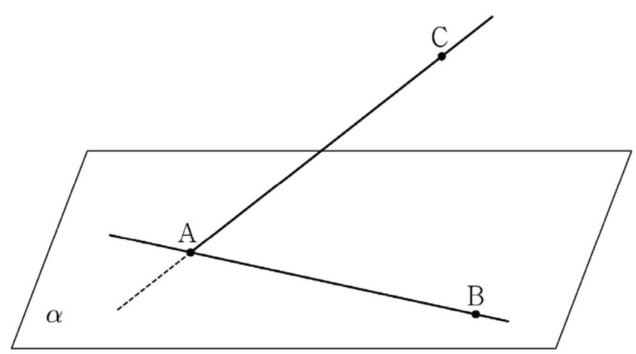
① $2\sqrt{3}$ ② 4 ③ 5

④ $3\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

P014

○○
(2023−기하27)

좌표공간에 직선 AB를 포함하는 평면 α가 있다.
평면 α 위에 있지 않은 점 C에 대하여 직선 AB와 직선 AC가 이루는 예각의 크기를 θ_1이라 할 때 $\sin\theta_1=\dfrac{4}{5}$이고, 직선 AC와 평면 α가 이루는 예각의 크기는 $\dfrac{\pi}{2}-\theta_1$이다. 평면 ABC와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ_2라 할 때 $\cos\theta_2$의 값은? [3점]



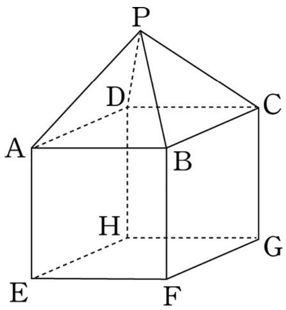
① $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$ ② $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\dfrac{\sqrt{7}}{6}$

④ $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{7}}{8}$

P015

(2004-자연7변형)

오른쪽 그림과 같이 정육면체 위에 정사각뿔을 올려놓은 도형이 있다. 이 도형의 모든 모서리의 길이가 2이고, 면 PAB와 면 AEFB가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]



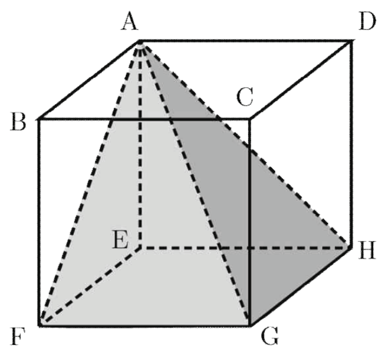
① $\frac{\sqrt{6}}{3}$　② $\frac{\sqrt{3}}{3}$　③ $\frac{1}{3}$

④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

P016

(2007-가형6)

정육면체 ABCD－EFGH에서 평면 AFG와 평면 AGH가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos^2\theta$ 의 값은? [3점]



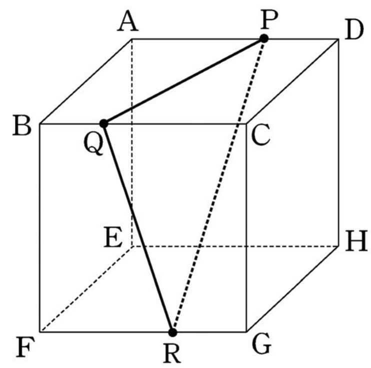
① $\frac{1}{6}$　② $\frac{1}{5}$　③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{1}{2}$

P017

(2005-가형7)

오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체 ABCD－EFGH의 세 모서리 AD, BC, FG 위에 $\overline{DP}=\overline{BQ}=\overline{GR}=1$인 세 점 P, Q, R가 있다.
평면 PQR와 평면 CGHD가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [3점]



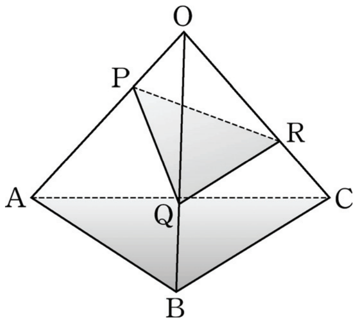
① $\frac{\sqrt{10}}{5}$　② $\frac{\sqrt{10}}{10}$　③ $\frac{\sqrt{11}}{11}$

④ $\frac{2\sqrt{11}}{11}$　⑤ $\frac{3\sqrt{11}}{11}$

P018

○○○
(2005(예비)-가형11)

그림의 정사면체에서 모서리 OA를 $1:2$로 내분하는 점을 P라 하고, 모서리 OB와 OC를 $2:1$로 내분하는 점을 각각 Q와 R라 하자. $\triangle$PQR와 $\triangle$ABC가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

④ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $\frac{\sqrt{6}}{3}$

P019

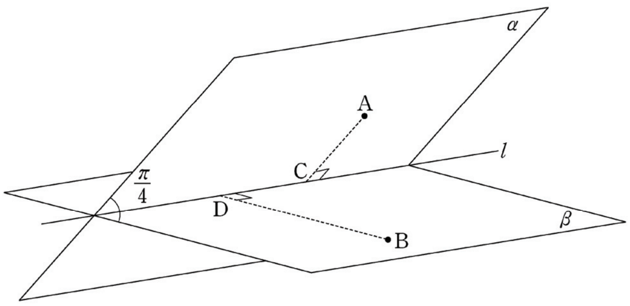
○○○
(2005(9)-가형23)

좌표공간에 반구 $(x-5)^2+(y-4)^2+z^2=9$, $z\geq 0$가 있다. y축을 포함하는 평면 α가 반구와 접할 때, α와 xy평면이 이루는 각을 θ라 하자. 이때, $30\cos\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

P020

○○○
(2017(9)−가형29)

그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



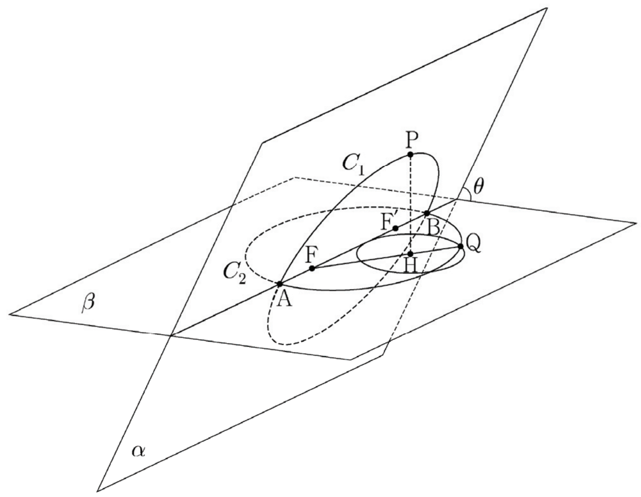
P021

○○○
(2024−기하28)

그림과 같이 서로 다른 두 평면 α, β의 교선 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=18$인 두 점 A, B가 있다. 선분 AB를 지름으로 하는 원 C_1이 평면 α 위에 있고, 선분 AB를 장축으로 하고 두 점 F, F′을 초점으로 하는 타원 C_2가 평면 β 위에 있다.

원 C_1 위의 한 점 P에서 평면 β에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{HF'}}<\overline{\mathrm{HF}}$이고 $\angle\mathrm{HFF'}=\frac{\pi}{6}$이다. 직선 HF와 타원 C_2가 만나는 점 중 점 H와 가까운 점을 Q라 하면, $\overline{\mathrm{FH}}<\overline{\mathrm{FQ}}$이다.

점 H를 중심으로 하고 점 Q를 지나는 평면 β 위의 원은 반지름의 길이가 4이고 직선 AB에 접한다. 두 평면 α, β가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은?
(단, 점 P는 평면 β 위에 있지 않다.) [4점]

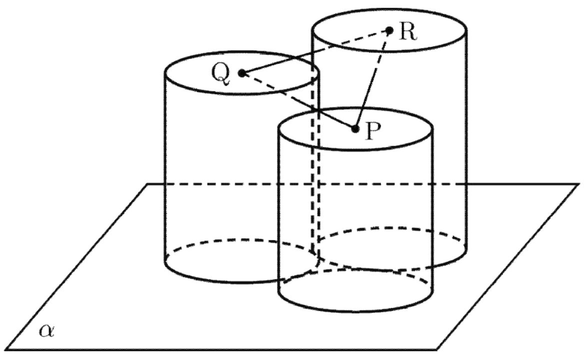


① $\frac{2\sqrt{66}}{33}$ ② $\frac{4\sqrt{69}}{69}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
④ $\frac{4\sqrt{3}}{15}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{78}}{39}$

P022

★★★
(2009-가형24)

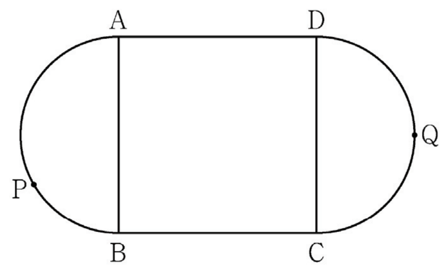
그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 60°이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$) [4점]

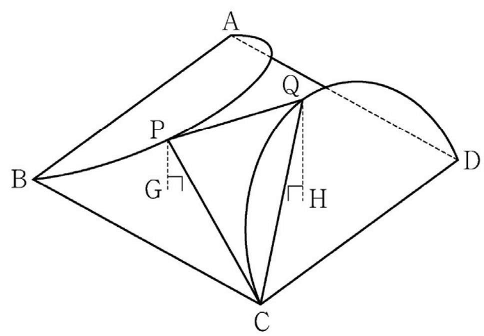


P023

★★★
(2022(9)-기하29)

그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께를 고려하지 않는다.) [4점]



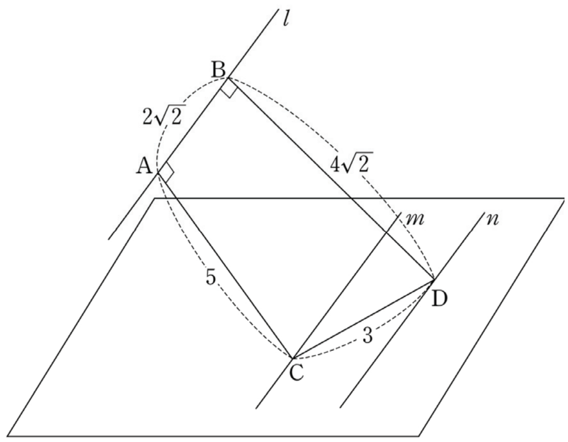


P024

★★★ (2011(9)-가형25)

같은 평면 위에 있지 않고 서로 평행한 세 직선 l, m, n이 있다. 직선 l 위의 두 점 A, B, 직선 m 위의 점 C, 직선 n 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{CD}}=3$
> (나) $\overline{\mathrm{AC}}\perp l$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$
> (다) $\overline{\mathrm{BD}}\perp l$, $\overline{\mathrm{BD}}=4\sqrt{2}$



두 직선 m, n을 포함하는 평면과 세 점 A, C, D를 포함하는 평면이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $15\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점]

P025

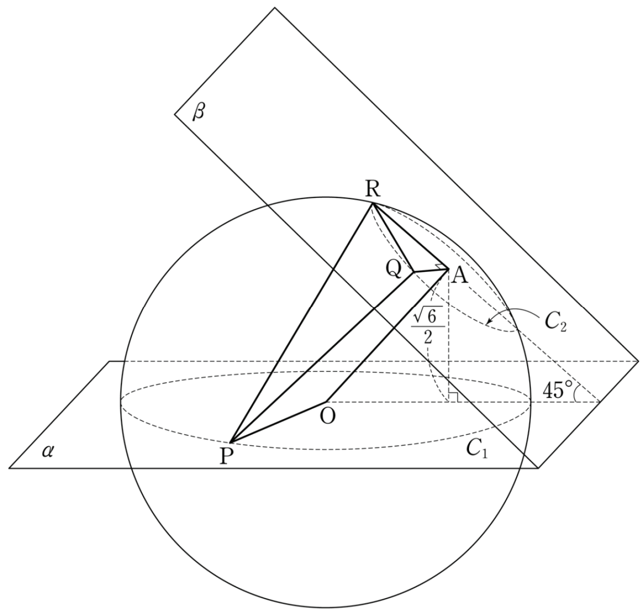
★★★ (2014(예비)-B형30)

반지름의 길이가 2인 구의 중심 O를 지나는 평면을 α라 하고, 평면 α와 이루는 각이 45°인 평면을 β라 하자. 평면 α와 구가 만나서 생기는 원을 C_1, 평면 β와 구가 만나서 생기는 원을 C_2라 하자. 원 C_2의 중심 A와 평면 α 사이의 거리가 $\frac{\sqrt{6}}{2}$일 때, 그림과 같이 다음 조건을 만족하도록 원 C_1 위에 점 P, 원 C_2 위에 두 점 Q, R을 잡는다.

> (가) $\angle \mathrm{QAR}=90^\circ$
> (나) 직선 OP와 직선 AQ는 서로 평행하다.

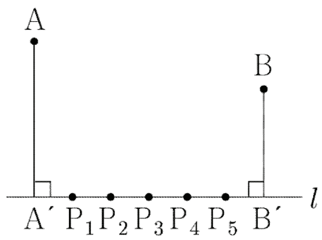
평면 PQR와 평면 AQPO가 이루는 각을 θ라 할 때, $\cos^2\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



예제 3

그림과 같이 직선 l과 두 정점 A, B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′, 선분 A′B′를 6등분하는 점을 각각 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5라 할 때, 직선 l 위를 움직이는 점 P에 대하여 벡터 $\frac{1}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$의 크기를 최소가 되게 하는 점 P의 위치를 구하여라.

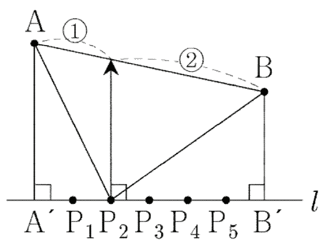


풀이

벡터

$\frac{1}{3}(2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}})$ $\cdots(*)$

의 종점은 선분 AB의 1 : 2내분점이다.



위의 그림처럼 벡터 (*)의 시점이 P_2일 때, 크기가 최소가 됨을 알 수 있다.

답 P_2

N. 벡터의 일차결합

(정의) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

두 벡터의 실수배의 합

$l\vec{a}+m\vec{b}$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 일차결합이라고 한다.

(성질) 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

$l\vec{a}+m\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow l=0,\ m=0$

$l\vec{a}+m\vec{b}=l'\vec{a}+m'\vec{b} \Leftrightarrow l=l',\ m=m'$

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않을 때,

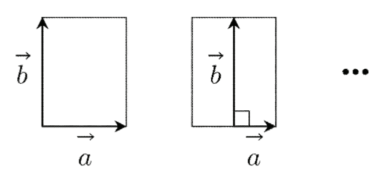
같은 평면 위에 놓인 임의의 벡터 $\vec{c}$에 대하여

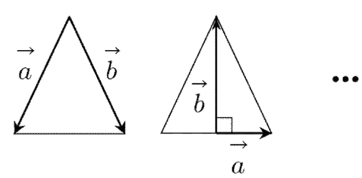
$\vec{c}=l\vec{a}+m\vec{b}$

인 두 실수 l, m이 항상 존재한다.

평면에서 직사각형과 삼각형이 주어졌을 때, 아래 그림과 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 두면

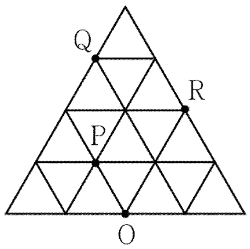
$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$이고, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하지 않다.



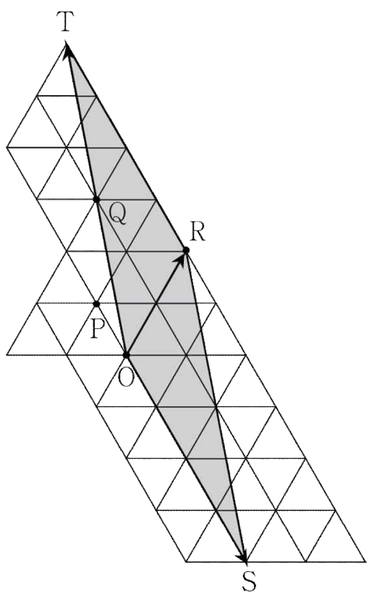


예제 1

아래 그림과 같이 서로 합동인 16개의 정삼각형을 변끼리 붙여서 만든 도형이 있다.
이 도형 위의 네 점 O, P, Q, R에 대하여
$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}$
일 때, $s+t$의 값을 구하시오. (단, s, t는 실수이다.)



풀이1 벡터의 덧셈의 정의(평행사변형을 그린다.)

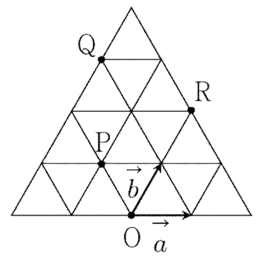


직선 OP 위의 점 S, 직선 OQ 위의 점 T에 대하여
$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT}$
를 만족시키는 평행사변형 OSRT를 그리자.
벡터의 실수배의 정의와 벡터의 덧셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OT}=s\overrightarrow{OP}+t\overrightarrow{OQ}$
그런데 $\overrightarrow{OS}=-4\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OT}=2\overrightarrow{OQ}$이므로 $s=-4$, $t=2$
$\therefore\ s+t=-2$

답 -2

※ [풀이1]처럼 평행사변형을 그려서 s, t의 값을 항상 정확하게 구해낼 수는 없으므로, 일반적인 방법인 [풀이2], [풀이3]을 생각하자.

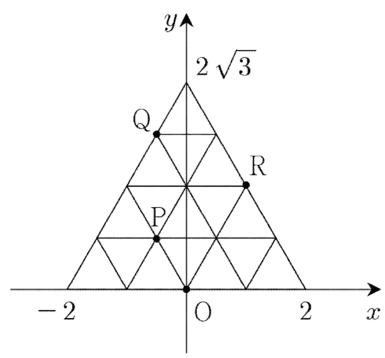
풀이2 벡터의 일차결합의 관점



위의 그림과 같이 $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$이고, 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$를 도입하자.
이제 세 벡터 $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ 각각을 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 실수배의 합으로 표현할 수 있다.
벡터의 뺄셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OP}=\vec{b}-\vec{a}$
벡터의 덧셈의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OQ}=\vec{a}+3(\vec{b}-\vec{a})=-2\vec{a}+3\vec{b}$
벡터의 실수배의 정의에 의하여
$\overrightarrow{OR}=2\vec{b}$
이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면
$2\vec{b}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(-2\vec{a}+3\vec{b})$
정리하면
$(s+2t)\vec{a}+(2-s-3t)\vec{b}=\vec{0}$
$s+2t=0$, $2-s-3t=0$
s, t에 대한 연립방정식을 풀면 $s=-4$, $t=2$이다.
$\therefore\ s+t=-2$

답 -2

풀이3 좌표평면의 도입



두 점 O, P의 좌표가 각각 $O(0,\ 0)$, $P\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$이 되도록 좌표평면을 도입하자.
두 점 Q, R의 좌표는 각각
$Q\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, $R(1,\ \sqrt{3})$
문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

$$(1,\ \sqrt{3})=s\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)+t\left(-\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$1=-\frac{s}{2}-\frac{t}{2},\ \sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}s+\frac{3\sqrt{3}}{2}t$$

s, t에 대한 연립방정식을 풀면 $s=-4$, $t=2$이다.

$\therefore\ s+t=-2$

답 -2

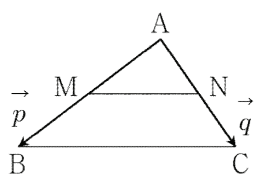
예제 2

삼각형 ABC의 두 변 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 할 때, $\overline{\mathrm{MN}}//\overline{\mathrm{BC}}$임을 벡터를 이용하여 증명하시오.

증명

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$로 두자.

이때, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$는 서로 평행하지 않다.



벡터의 실수배의 정의에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\vec{p},\ \overrightarrow{\mathrm{AN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{2}\vec{q}$$

벡터의 뺄셈의 정의에 의하여

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{q}-\vec{p}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{AN}}-\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}\vec{q}-\frac{1}{2}\vec{p}$$

이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$이 서로 평행하므로

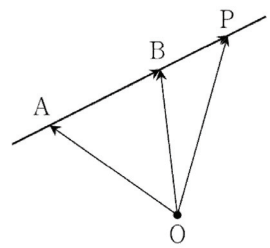
$\therefore\ \overline{\mathrm{MN}}//\overline{\mathrm{BC}}$

답 풀이참조

N. 벡터의 일차결합: 세 점이 한 직선 위에 있다. (점, 선분, 직선)

세 점 A, B, P가 한 직선 위에 있을 조건을 벡터로 나타내면 다음과 같다.

(단, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$이다.)



위의 그림에서

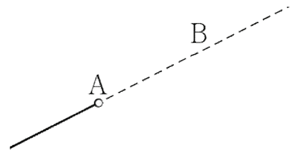
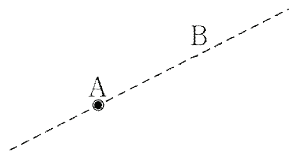
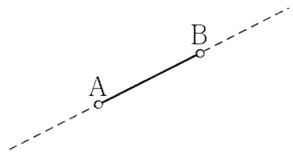
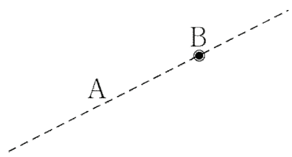
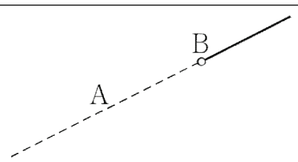
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}//\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$\Leftrightarrow\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ (단, t는 실수)

$\Leftrightarrow\ \vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

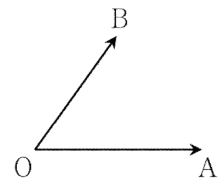
$\Leftrightarrow\ \vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$ (단, $m+n=1$) ※ 이때, 두 실수 m, n은 서로 종속이다.(독립×)

t의 값 또는 범위에 따른 점 P의 자취는 아래 표와 같다.

t의 값 또는 범위	점 P의 자취
$t<0$	
$t=0$	 (점 A)
$0<t<1$	
$t=1$	 (점 B)
$t>1$	

N. 벡터의 일차결합: 영역

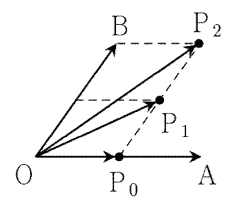
평면에서 세 점 A, B, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$라고 하자. (단, 시점은 원점 O이다.)



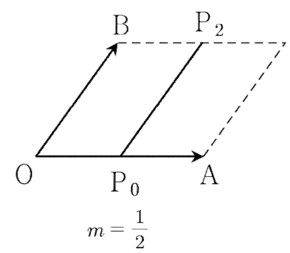
$\vec{p}=m\vec{a}+n\vec{b}$(일차결합)일 때, 두 실수 m, n이 갖는 값에 따른 점 P의 영역을 그려보자.

- $0\le m\le 1$, $0\le n\le 1$인 경우 (m, n은 서로 독립)

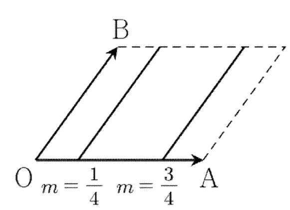
$m=\frac{1}{2}$, $n=0$일 때, 점 P의 위치를 P_0, $m=\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{2}$일 때, 점 P의 위치를 P_1, $m=\frac{1}{2}$, $n=1$일 때, 점 P의 위치를 P_2라고 하면 아래 그림과 같다.



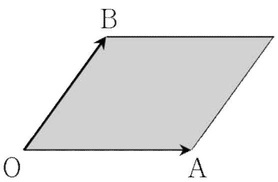
$m=\frac{1}{2}$, $0\le n\le 1$일 때, 점 P의 자취는 선분 P_0P_2이다.



$m=\frac{1}{4}$, $0\le n\le 1$일 때, 점 P의 자취와 $m=\frac{3}{4}$, $0\le n\le 1$일 때, 점 P의 자취는 아래 그림처럼 각각 선분이다.



$0\le m\le 1$, $0\le n\le 1$일 때, 점 P의 자취는 아래 그림처럼 평행사변형이다. (단, 경계포함)



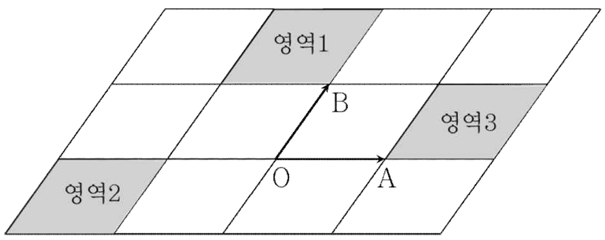
마찬가지의 방법으로

$-1 \leq m \leq 0$, $1 \leq n \leq 2$일 때, 점 P가 나타내는 영역을 '영역1',

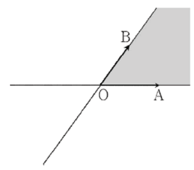
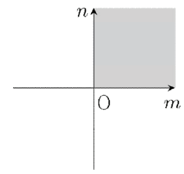
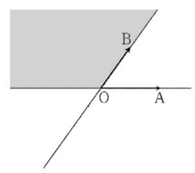
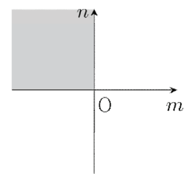
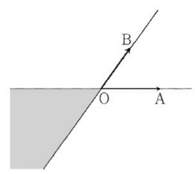
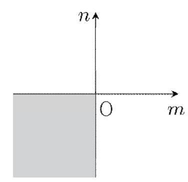
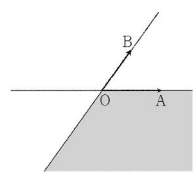
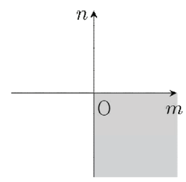
$-2 \leq m \leq -1$, $-1 \leq n \leq 0$일 때, 점 P가 나타내는 영역을 '영역2',

$1 \leq m \leq 2$, $0 \leq n \leq 1$일 때, 점 P가 나타내는 영역을 '영역3'

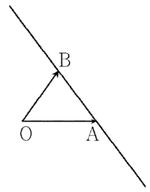
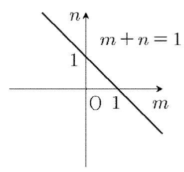
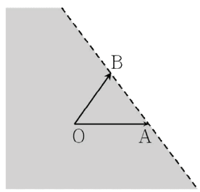
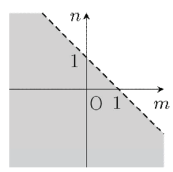
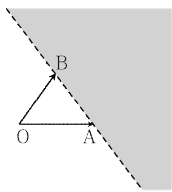
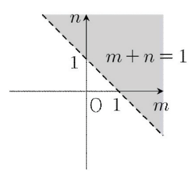
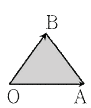
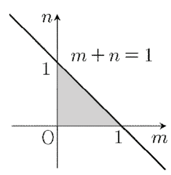
이라고 하면, 각각의 영역은 아래 그림과 같다. (m, n은 서로 독립) (단, 경계포함)



아래의 표에서 점 P의 자취와 점 $(m,\ n)$의 자취의 관계에 대하여 생각해보라.

m, n의 범위		점 P의 자취	점 $(m,\ n)$의 자취
m, n 은 서로 독립	$m>0$, $n>0$	 (단, 경계제외)	 (단, 경계제외)
	$m<0$, $n>0$	 (단, 경계제외)	 (단, 경계제외)
	$m<0$, $n<0$	 (단, 경계제외)	 (단, 경계제외)
	$m>0$, $n<0$	 (단, 경계제외)	 (단, 경계제외)

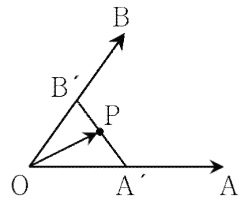
아래의 표에서 점 P의 자취와 점 $(m,\ n)$의 자취의 관계에 대하여 생각해보라.
(※ 부등식의 영역을 포함하고 있으므로 꼭 알아야 하는 것은 아니다.)

$m,\ n$의 범위와 방정식/부등식		점 P의 자취	점 $(m,\ n)$의 자취
$m,\ n$ 은 서로 종속	$m+n$ $=1$		
	$m+n$ <1	 (단, 경계제외)	 (단, 경계제외)
	$m+n$ >1	 (단, 경계제외)	 (단, 경계제외)
	$m\geq 0$, $n\geq 0$, $0\leq$ $m+n$ ≤ 1	 (단, 경계포함)	 (단, 경계포함)

$m\geq 0,\ n\geq 0,\ 0\leq m+n\leq 1$일 때, 점 P가 나타내는 영역을 '세 점이 한 직선 위에 있을 필요충분조건' 의 관점에서 확인해 보자. ($m,\ n$은 서로 종속)

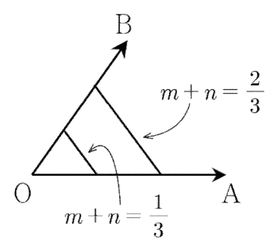
$m+n=\dfrac{1}{2}$(즉, $2m+2n=1$)일 때, 점 P의 자취를 그려보자.

두 선분 OA, OB의 중점을 각각 A', B'라고 하자.



$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2m\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+2n\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$
$=2m\overrightarrow{\mathrm{OA}'}+2n\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ (단, $2m+2n=1,\ m\geq 0,\ n\geq 0$)
이므로, 점 P는 선분 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ 위의 점이다.

$m+n=\dfrac{1}{3}$일 때, 점 P의 자취와 $m+n=\dfrac{2}{3}$일 때, 점 P의 자취는 아래 그림처럼 각각 삼각형 OAB 내부의 선분이다.



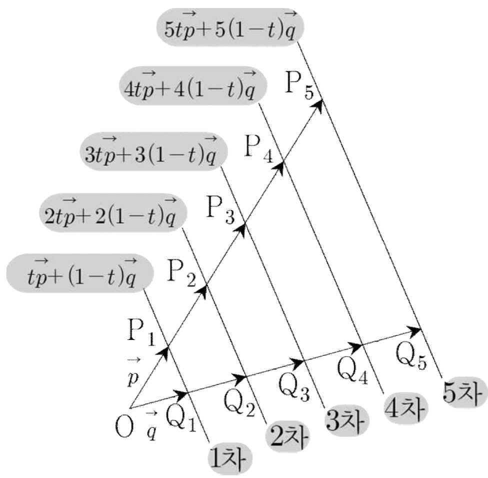
N. 벡터의 일차결합: 차원

• 벡터의 합과 차원

아래 그림처럼 평면 위의 세 점 O, P_1, Q_1에 대하여

$\overrightarrow{OP_1}=\vec{p}$, $\overrightarrow{OQ_1}=\vec{q}$

라고 하자. 이때, 세 점 O, P_1, Q_1은 한 직선 위에 있지 않다.



직선 P_1Q_1 위의 점을 종점으로 하는 위치벡터는

$t\vec{p}+(1-t)\vec{q}$

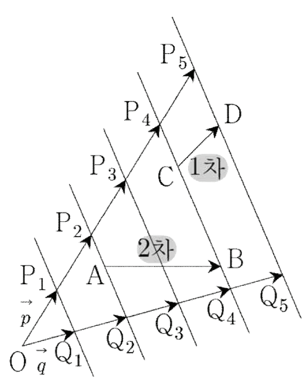
로 표현할 수 있다. 이때, 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$의 계수의 합은 항상 1이다.

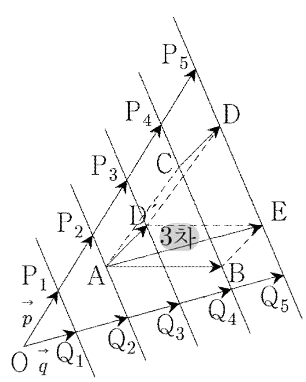
$\overrightarrow{OP_n}=n\vec{p}$, $\overrightarrow{OQ_n}=n\vec{q}$ (단, n은 자연수)

라고 하면 직선 P_nQ_n 위의 점을 종점으로 하는 위치벡터는

$nt\vec{p}+n(1-t)\vec{q}$

로 표현할 수 있다. 이때, 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$의 계수의 합은 항상 n이다.





위의 그림처럼 직선 P_2Q_2 위에 점 A, 직선 P_4Q_4 위에 두 점 B, C, 직선 P_5Q_5 위에 점 D가 있다고 하자. 그리고 점 C가 점 A에 일치하도록 벡터 $\overrightarrow{CD}$를 평행이동시켰을 때, 점 D가 이동되는 점을 D′라고 하자.

$$\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{2차}+\underbrace{\overrightarrow{CD}}_{1차}=\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{2차}+\underbrace{\overrightarrow{AD'}}_{1차}=\underbrace{\overrightarrow{AE}}_{3차}$$

위와 같이 벡터의 합에서 차수를 생각할 수 있다.

$\overrightarrow{AB}=m\vec{p}+n\vec{q}$ $(m+n=2)$

$\overrightarrow{CD}=m'\vec{p}+n'\vec{q}$ $(m'+n'=1)$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=(m+m')\vec{p}+(n+n')\vec{q}$

$(m+m'+n+n'=3)$

$\overline{PA}^2+\overline{PC}^2 \geq \overline{HA}^2+\overline{HC}^2$

(단, 등호는 점 P가 점 H 위에 올 때 성립한다.)

yz평면에서 직선 BD의 방정식은

$\frac{y}{1}+\frac{z}{2}=1$, 즉 $z=-2y+2$

yz평면에서 직선 OH의 방정식은

$z=\frac{1}{2}y$

위의 두 직선의 방정식을 연립하면

$y=\frac{4}{5}$, $z=\frac{2}{5}$, $P\left(0,\ \frac{4}{5},\ \frac{2}{5}\right)$

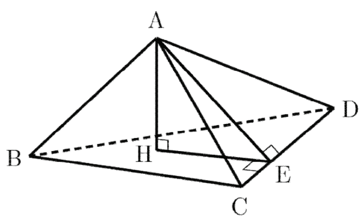
$\therefore\ a+b+c=\frac{6}{5}$

$\therefore\ p+q=11$

답 11

P013 | 답 ②

[풀이]



점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 H이다.

$\overline{AH} \perp BCD$

점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 E라고 하자.

$\overline{AE} \perp \overline{CD}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HE} \perp \overline{CD}$

이면각의 정의에 의하여 두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기는 $\angle AEH$이다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\angle AEH=\frac{\pi}{6}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle ACD$의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AE}\times\overline{CD}=40$

$\overline{CD}=10$이므로 $\overline{AE}=8$

직각삼각형 AEH에서 특수각의 삼각비에 의하여

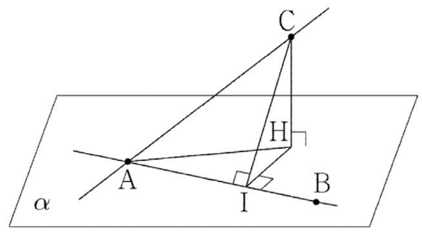
$\therefore\ \overline{AH}=\overline{EA}\times\sin\frac{\pi}{6}=4$

답 ②

P014 | 답 ①

[풀이]

점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



$\overline{CH} \perp \alpha$, $\overline{HI} \perp \overline{AB}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{CI} \perp \overline{AB}$

위의 그림에서

$\angle CAB=\theta_1$, $\angle CAH=\frac{\pi}{2}-\theta_1$, $\angle HCA=\theta_1$

이다.

$\overline{CA}=5k$로 두자.

두 직각삼각형 CAI, CAH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{CI}=4k$, $\overline{AI}=3k$, $\overline{CH}=3k$, $\overline{AH}=4k$

직각삼각형 HAI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{HI}=\sqrt{(4k)^2-(3k)^2}=\sqrt{7}k$

이면각의 정의에 의하여

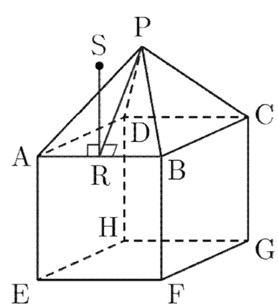
$\therefore\ \cos\theta_2=\cos(\angle CIH)=\frac{\overline{IH}}{\overline{CI}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

답 ①

P015 | 답 ①

[풀이1]

점 P에서 직선 AB와 평면 AEFB에 내린 수선의 발을 각각 R, S라고 하자.



$\overline{PS} \perp$ (평면 AEFB), $\overline{PR} \perp \overline{AB}$

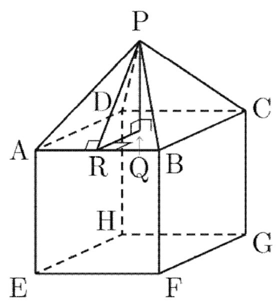
이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AB} \perp \overline{RS}$

두 평면 PAB, AEFB의 교선이 AB이고,

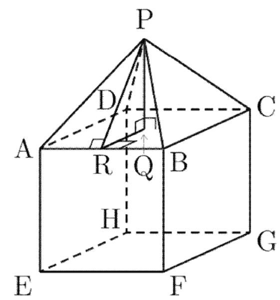
두 선분 PR, RS가 각각 선분 AB에 수직이므로
이면각의 정의에 의하여
$\angle \mathrm{PRS}=\theta$
정삼각형 PAB의 한 변의 길이가 2이므로
$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{3}$
$\overline{\mathrm{PS}}=$(점 P에서 평면 AEFB에 이르는 거리)
$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=1$
직각삼각형 PRS에서 삼각비의 정의에 의하여
$\sin\theta=\frac{\overline{\mathrm{PS}}}{\overline{\mathrm{RP}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 즉, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$
답 ①

[풀이2]
점 P에서 평면 ABCD와 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자.

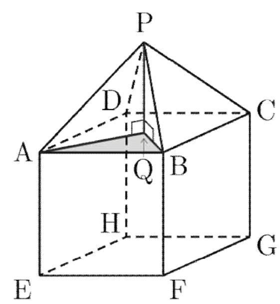


$\overline{\mathrm{PQ}}\perp$(평면ABCD), $\overline{\mathrm{PR}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$
두 평면 PAB, AEFB의 교선이 AB이고,
두 선분 PR, RQ가 각각 선분 AB에 수직이므로
이면각의 정의에 의하여
$\angle \mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$
정삼각형 PAB의 한 변의 길이가 2이므로
$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{3}$
점 Q는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로
$\overline{\mathrm{RQ}}=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}=1$
직각삼각형 PRQ에서 삼각비의 정의에 의하여
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\overline{\mathrm{RQ}}}{\overline{\mathrm{PR}}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 즉, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$
답 ①

[풀이3] (정사영)
점 P에서 평면 ABCD와 직선 AB에 내린 수선의 발을 각각 Q, R이라고 하자.



$\overline{\mathrm{PQ}}\perp$(평면ABCD), $\overline{\mathrm{PR}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}}\perp\overline{\mathrm{QR}}$
두 평면 PAB, AEFB의 교선이 AB이고,
두 선분 PR, RQ가 각각 선분 AB에 수직이므로
이면각의 정의에 의하여
$\angle \mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$



두 삼각형 PAB, QAB의 넓이를 각각 S, T라고 하자.
정삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=\sqrt{3}$
점 Q는 정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점이므로
점 Q에서 직선 AB에 이르는 거리는 $1\left(=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}\right)$이다.
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
$T=\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$
정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여
$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{T}{S}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 즉, $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\therefore\ \cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}$
답 ①

P016 | 답 ③

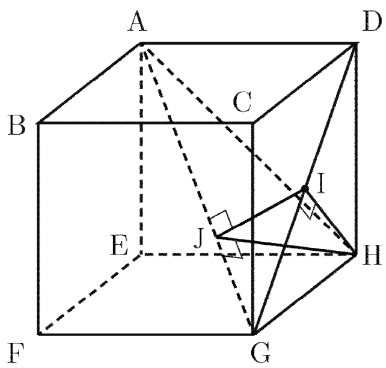
[풀이1]

정육면체의 정의에 의하여

$\overline{AD} // \overline{FG}$

평면의 결정 조건에 의하여 점 D는 평면 AFG 위에 있다.

즉, 네 점 A, F, G, D는 한 평면 위에 있다.



정육면체의 정의에 의하여

$\overline{AD} \perp \mathrm{CGHD}$

평면 CGHD에 수직인 직선 AD를 포함하는 평면 AFGD에 대하여

$\mathrm{AFGD} \perp \mathrm{CGHD}$

점 H에서 두 평면 AFGD, CGHD의 교선 GD에 내린 수선의 발을 I라고 하면

$\overline{HI} \perp \mathrm{AFGD}$

점 I에서 선분 AG에 내린 수선의 발을 J라고 하면

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HJ} \perp \overline{AG}$

이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{HJI} = \theta$

정육면체의 정의에 의하여

$\overline{GH} \perp \mathrm{AEHD}$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{GH} \perp \overline{AH}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$AGH의 넓이)

$= \dfrac{1}{2} \times \overline{AH} \times \overline{HG} = \dfrac{1}{2} \times \overline{AG} \times \overline{HJ}$

대입하여 정리하면

$\overline{HJ} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

점 I는 정사각형 CGHD의 두 대각선의 교점이므로

$\overline{HI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

직각삼각형 HJI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{JI} = \sqrt{\overline{HJ}^2 - \overline{HI}^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}$

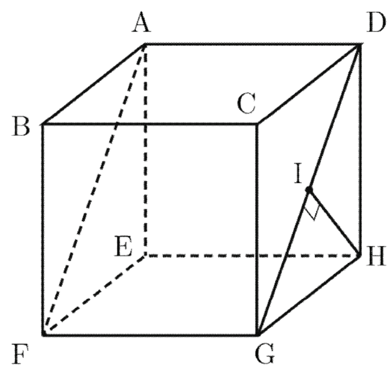
직각삼각형 HJI에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{\overline{JI}}{\overline{HJ}} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \ \cos^2\theta = \dfrac{1}{4}$

답 ③

[풀이2] (정사영)



정육면체의 정의에 의하여

$\overline{AD} \perp \mathrm{CGHD}$

평면 CGHD에 수직인 직선 AD를 포함하는 평면 AFGD에 대하여

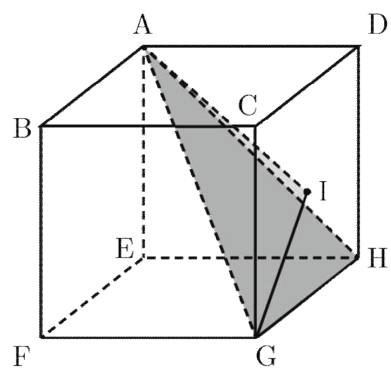
$\mathrm{AFGD} \perp \mathrm{CGHD}$

점 H에서 두 평면 AFGD, CGHD의 교선 GD에 내린 수선의 발을 I라고 하면

$\overline{HI} \perp \mathrm{AFGD}$

점 H에서 평면 AFGD에 내린 수선의 발은 I이므로 삼각형 AGH의 평면 AFGD 위로의 정사영은 삼각형 AGI이다.

두 삼각형 AGH, AGI의 넓이를 각각 S, T라고 하자.



정육면체의 정의에 의하여

$\overline{GH} \perp \mathrm{AEHD}$

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{GH} \perp \overline{HA}$

삼각형 AGH는 $\angle \mathrm{GHA} = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S = \dfrac{1}{2} \times \overline{GH} \times \overline{HA} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

점 I는 정사각형 CGHD의 대각선 GD의 중점이므로

$$T=\frac{1}{2}\times(\triangle \mathrm{AGD}\text{의 넓이})=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$$\cos\theta=\frac{T}{S}=\frac{1}{2}$$

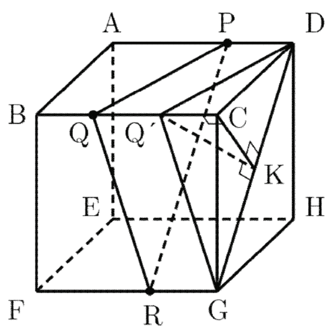
$$\therefore\ \cos^2\theta=\frac{1}{4}$$

답 ③

P017 | 답 ⑤

[풀이1] ★

두 직선 PQ, DQ′이 서로 평행하도록 모서리 BC 위에 점 Q′을 잡자. 이때, 두 직선 QR, Q′G도 서로 평행하다.



정육면체의 정의에 의하여

직선 BC가 평면 CGHD에 수직이므로

$\overline{\mathrm{Q'C}}\perp \mathrm{CGHD}$

점 C에서 선분 GD에 내린 수선의 발을 K라고 하면

$\overline{\mathrm{CK}}\perp\overline{\mathrm{GD}}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{Q'K}}\perp\overline{\mathrm{GD}}$

두 평면 PQR, DQ′G는 서로 평행하므로

두 평면 DQ′G, CGHD가 이루는 각의 크기는 θ이다.

두 평면 DQ′G, CGHD의 교선은 GD이고

두 선분 CK, Q′K는 각각 직선 GD에 수직이므로

이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{Q'KC}=\theta$

정사각형 CGHD의 두 대각선의 교점이 K이므로

$$\overline{\mathrm{CK}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

평행사변형 PQQ′D에서

$\overline{\mathrm{QQ'}}=\overline{\mathrm{PD}}=1$이므로

$\overline{\mathrm{Q'C}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BQ}}-\overline{\mathrm{QQ'}}=1$

직각삼각형 Q′KC에서 피타고라스의 정리에 의하여

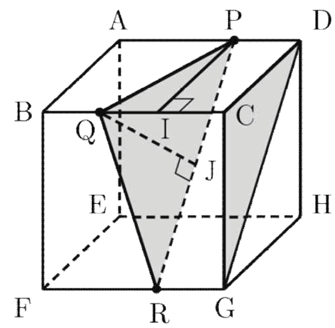
$$\overline{\mathrm{Q'K}}=\sqrt{\overline{\mathrm{Q'C}}^2+\overline{\mathrm{CK}}^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{KC}}}{\overline{\mathrm{Q'K}}}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

답 ⑤

[풀이2] (정사영) ★

점 P에서 모서리 BC에 내린 수선의 발을 I, 점 Q에서 선분 PR에 내린 수선의 발을 J라고 하자.



정육면체의 정의에 의하여

직선 AD가 평면 CGHD에 수직이므로

점 P에서 평면 CGHD에 내린 수선의 발은 D이다.

마찬가지의 이유로 두 점 Q, R에서 평면 CGHD에 내린 수선의 발은 각각 C, G이다.

그러므로 삼각형 PQR의 평면 CGHD 위로의 정사영은 삼각형 DCG이다.

두 삼각형 PQR, DCG의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

직각삼각형 PQI에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{QI}}^2+\overline{\mathrm{IP}}^2}=\sqrt{10}$$

마찬가지의 방법으로

$$\overline{\mathrm{QR}}=\sqrt{10}$$

삼각형 PQR은 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$인 이등변삼각형이다.

직각삼각형 PRGD에서

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{DG}}=3\sqrt{2}$

직각삼각형 PQJ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{QJ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PJ}}^2}=\frac{\sqrt{22}}{2}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QJ}}=\frac{3\sqrt{11}}{2}$$

$$T=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{DC}}\times\overline{\mathrm{CG}}=\frac{9}{2}$$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$$\therefore\ \cos\theta=\frac{T}{S}=\frac{3\sqrt{11}}{11}$$

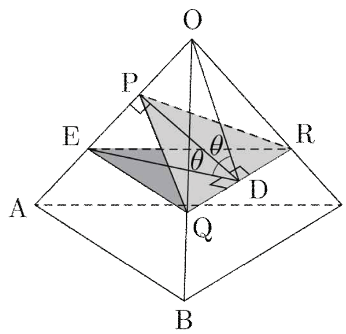
답 ⑤

P018 | 답 ⑤

[풀이1]

정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 3으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

두 선분 QR, AP의 중점을 각각 D, E라고 하자. 그리고 두 평면 ABC, PQR이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.



위의 그림과 같이 두 평면 ABC, EQR은 서로 평행하므로 두 평면 ABC, EQR이 이루는 각의 크기는 θ이다.

정사면체 OEQR에서

$\overline{PD} \perp \overline{QR}$, $\overline{ED} \perp \overline{QR}$

이므로 이면각의 정의에 의하여

$\angle PDE = \theta$ (그리고 $\angle ODP = \theta$)

$\overline{OD} = \overline{DE}$인 이등변삼각형 OED에서

$\overline{PE} = 1$, $\overline{ED} = \sqrt{3}$, $\overline{PD} = \sqrt{2}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

[풀이2] ★

정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 3으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

주어진 조건에서

$\overline{OP} = 1$, $\overline{OQ} = 2$, $\angle QOP = 60^\circ$

이므로 $\triangle OPQ$는 $\angle OPQ = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

마찬가지의 방법으로

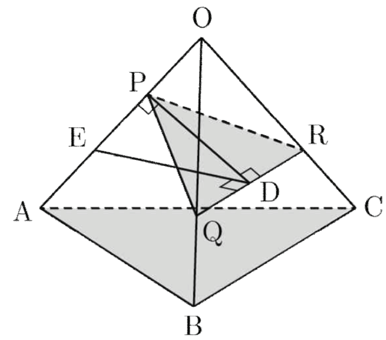
$\triangle OPR$은 $\angle OPR = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

$\overline{OP} \perp \overline{PQ}$, $\overline{OP} \perp \overline{PR}$

이므로 직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{OP} \perp$ (평면 PQR)

선분 AP의 중점을 E, 이등변삼각형 PQR에서 $\angle P$의 이등분선과 변 QR의 교점을 D라고 하자. 이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 PD는 선분 QR을 수직이등분한다. 이때, 점 D는 이등변삼각형 EQR에서 $\angle E$의 이등분선과 변 QR의 교점이기도 하다.



서로 닮은 두 삼각형 OAB, OEQ에 대하여

$\overline{OA} : \overline{OE} = \overline{OB} : \overline{OQ}$이므로 $\overline{EQ} // \overline{AB}$

직선 AB를 포함하고 직선 EQ를 포함하지 않는 평면 ABC에 대하여 $\overline{EQ} // \overline{AB}$이므로

(평면 ABC)//$\overline{EQ}$ … ㉠

마찬가지의 방법으로

(평면 ABC)//$\overline{ER}$ … ㉡

㉠, ㉡에 의하여

(평면 ABC)//(평면 EQR)

두 평면 PQR과 EQR이 이루는 각의 크기는 θ이다.

$\overline{EP} \perp$ (평면 PQR), $\overline{PD} \perp \overline{QR}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{ED} \perp \overline{QR}$

두 평면 PQR과 EQR의 교선은 QR이고

$\overline{PD} \perp \overline{QR}$, $\overline{ED} \perp \overline{QR}$

이므로 이면각의 정의에 의하여

$\angle EDP = \theta$

직각삼각형 PQD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PD} = \sqrt{\overline{PQ}^2 - \overline{QD}^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$

직각삼각형 EDP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{ED} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{PE}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

직각삼각형 EDP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{\overline{DP}}{\overline{ED}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

[풀이3]

정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 3으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

주어진 조건에서

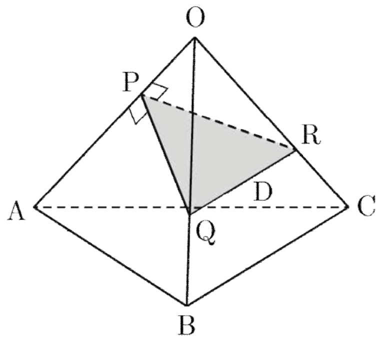
$\overline{OP} = 1$, $\overline{OQ} = 2$, $\angle QOP = 60^\circ$

이므로 $\triangle OPQ$는 $\angle OPQ = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

마찬가지의 방법으로

$\triangle OPR$은 $\angle OPR = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

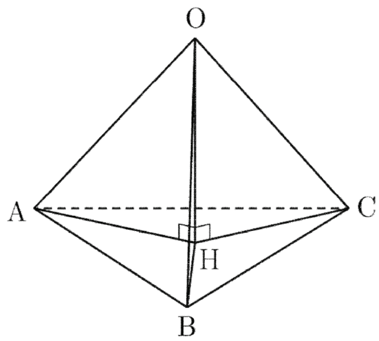
$\overline{OP} \perp \overline{PQ}$, $\overline{OP} \perp \overline{PR}$



직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}} \perp$ (평면 PQR)

점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}} \perp \overline{\mathrm{HA}}$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp \overline{\mathrm{HB}}$, $\overline{\mathrm{OH}} \perp \overline{\mathrm{HC}}$

세 직각삼각형 OHA, OHB, OHC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}}^2 = \overline{\mathrm{OH}}^2 + \overline{\mathrm{HA}}^2$

$\overline{\mathrm{OB}}^2 = \overline{\mathrm{OH}}^2 + \overline{\mathrm{HB}}^2$

$\overline{\mathrm{OC}}^2 = \overline{\mathrm{OH}}^2 + \overline{\mathrm{HC}}^2$

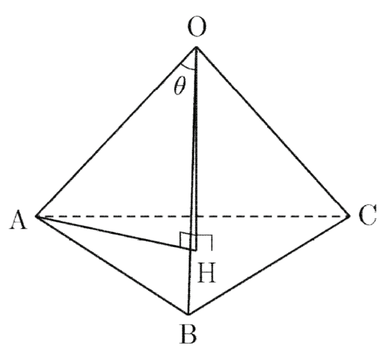
정사면체의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} = \overline{\mathrm{OC}}$

이므로

$\overline{\mathrm{HA}} = \overline{\mathrm{HB}} = \overline{\mathrm{HC}}$

정삼각형 ABC에서 점 H는 외심이다. 그런데 정삼각형에서는 외심과 무게중심이 일치하므로 점 H는 삼각형 ABC의 무게중심이다.



$\overline{\mathrm{OA}} \perp$ (평면 PQR), $\overline{\mathrm{OH}} \perp$ (평면 ABC)

이므로

$\angle \mathrm{AOH} = \theta$

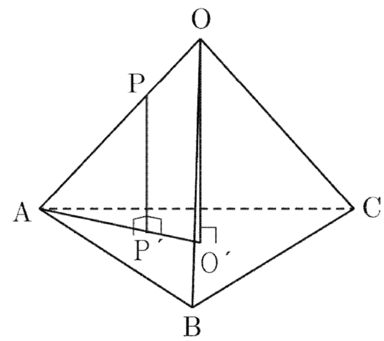
직각삼각형 AOH에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OH}}}{\overline{\mathrm{AO}}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

답 ⑤

[풀이4] (정사영)

점 O에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 O′이라고 하자. 이때, 점 O′은 삼각형 ABC의 무게중심이다. 그리고 점 P에서 선분 AO′에 내린 수선의 발을 P′이라고 하자.



$\overline{\mathrm{OO'}} \perp$ (평면 ABC)이므로

직선 OO′을 포함하는 평면 OAO′에 대하여

(평면 OAO′)$\perp$(평면 ABC)

두 평면 OAO′과 ABC가 서로 수직이므로

$\overline{\mathrm{PP'}} \perp$ (평면 ABC)

점 P에서 평면 ABC에 내린 수선의 발은 P′이다.

서로 닮은 두 직각삼각형 OAO′과 PAP′에 대하여

$\overline{\mathrm{AP}} : \overline{\mathrm{PO}} = \overline{\mathrm{AP'}} : \overline{\mathrm{P'O'}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP'}} : \overline{\mathrm{P'O'}} = 2:1$

두 점 Q, R에서 평면 ABC에 내린 수선의 발을 각각 Q′, R′이라고 하면

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{BQ'}} : \overline{\mathrm{Q'O'}} = 1:2$, $\overline{\mathrm{CR'}} : \overline{\mathrm{R'O'}} = 1:2$

정사면체 OABC의 한 모서리의 길이를 3으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

두 삼각형 PQR, P′Q′R′의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

우선 삼각형 PQR의 넓이를 구하자.

주어진 조건에서

$\overline{\mathrm{OP}} = 1$, $\overline{\mathrm{OQ}} = 2$, $\angle \mathrm{QOP} = 60^\circ$

이므로 $\triangle$OPQ는 $\angle \mathrm{OPQ} = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

마찬가지의 방법으로

$\triangle$OPR은 $\angle \mathrm{OPR} = 90^\circ$ 인 직각삼각형이다.

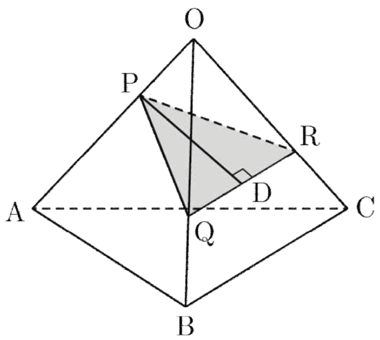
서로 합동인 두 직각삼각형 OPQ, OPR에서

특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{PR}} = \sqrt{3}$

이등변삼각형 PQR에서 $\angle$P의 이등분선과 변 QR의 교점을 D라고 하자.

이등변삼각형의 성질에 의하여 선분 PD는 선분 QR을 수직이등분한다.



서로 닮은 두 삼각형 OBC, OQR에 대하여

$\overline{OB}:\overline{BC}=\overline{OQ}:\overline{QR}$이므로 $\overline{QR}=2$

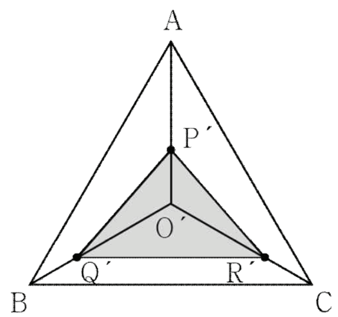
직각삼각형 PQD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PD}=\sqrt{\overline{PQ}^2-\overline{QD}^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S=\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{QR}=\sqrt{2}$

이제 삼각형 P′Q′R′의 넓이를 구하자.



서로 닮음인 두 삼각형 O′BC, O′Q′R′에 대하여

$\overline{O'Q'}:\overline{O'B}=\overline{Q'R'}:\overline{BC}$이므로 $\overline{Q'R'}=2$

(점 P′과 직선 Q′R′ 사이의 거리)

$=\overline{P'O'}+$(점 O′과 직선 Q′R′ 사이의 거리)

$=\frac{1}{3}\overline{AO'}+\frac{2}{3}\times$(점 O′과 직선 BC 사이의 거리)

$=\frac{1}{3}\times\sqrt{3}+\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$T=\frac{1}{2}\times\overline{Q'R'}\times$(점 P′과 직선 Q′R′ 사이의 거리)

$=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta=\frac{T}{S}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

혹은 다음과 같이 $\cos\theta$의 값을 구할 수도 있다.

점 P′에서 직선 Q′R′에 내린 수선의 발을 H라고 하면

정사영의 길이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta=\frac{\overline{HP'}}{\overline{PD}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

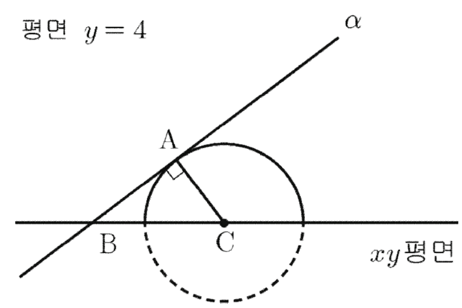
답 ⑤

P019 | 답 24

[풀이1] ★

주어진 반구의 중심을 C, 평면 α와 주어진 반구의 접점을 A, y축 위의 점 (0, 4, 0)을 B라고 하자.

문제에서 주어진 도형들을 평면 ABC로 자른 단면을 관찰하자.



주어진 조건에서

$\overline{BC}=$(점 C의 x좌표)$=5$

$\overline{CA}=$(구의 반지름의 길이)$=3$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AB}=4$

평면 ABC는 y축에 수직이므로

직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{CB}\perp(y$축), $\overline{AB}\perp(y$축)

이면각의 정의에 의하여

$\angle CBA=\theta$

직각삼각형 ABC에서

$\cos\theta=\frac{\overline{BA}}{\overline{CB}}=\frac{4}{5}$

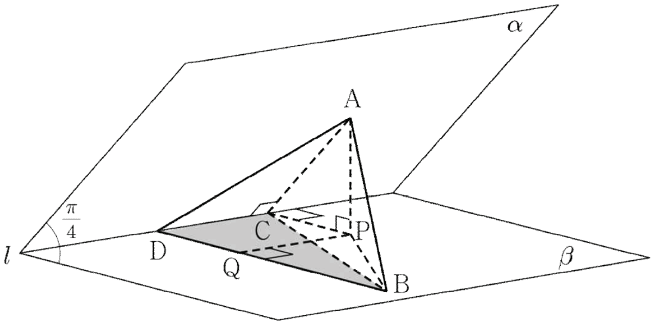
$\therefore\ 30\cos\theta=24$

답 24

P020 | 답 12

[풀이1]

점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 P, 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.



직선과 평면의 수직 관계에 의하여

$\overline{AP} \perp \overline{PB}$

직선과 평면이 이루는 각에 대한 정의에 의하여

$\angle ABP = \frac{\pi}{6}$

직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AP} = \overline{AB} \times \sin\frac{\pi}{6} = 1$, $\overline{BP} = \overline{AB} \times \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\overline{AP} \perp \beta$, $\overline{AC} \perp \overline{CD}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PC} \perp \overline{CD}$

이면각의 정의에 의하여

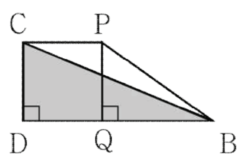
$\angle ACP =$(두 평면 α, β가 이루는 각의 크기)$= \frac{\pi}{4}$

직각삼각형 ACP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AC} = \dfrac{\overline{AP}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

직각삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{DC} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2} = 1$



정사각형 CDQP에서

$\overline{PQ} = \overline{CD} = 1$

직각삼각형 BPQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{QB} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2} = \sqrt{2}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(△CDB의 넓이)$= \frac{1}{2}\overline{CD}\,\overline{DB} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$

이므로

(사면체 ABCD의 부피)

$= \frac{1}{3} \times$(△CDB의 넓이)$\times \overline{AP}$

$= \frac{1}{3} \times \frac{1+\sqrt{2}}{2} \times 1 = \frac{1+\sqrt{2}}{6}$

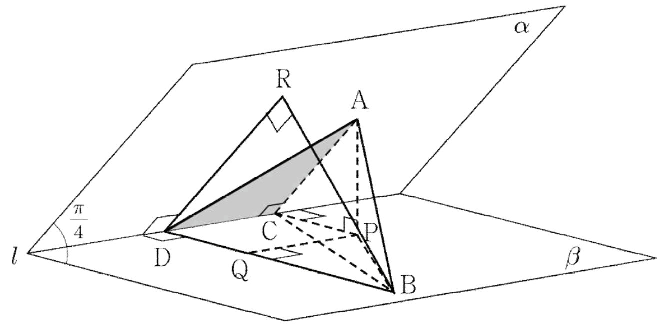
$a = b = \frac{1}{6}$이므로

$\therefore\ 36(a+b) = 12$

답 12

[풀이2]

점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 P, 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 Q, 점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 R이라고 하자.



직선과 평면의 수직 관계에 의하여

$\overline{AP} \perp \overline{PB}$

직선과 평면이 이루는 각에 대한 정의에 의하여

$\angle ABP = \frac{\pi}{6}$

직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AP} = \overline{AB} \times \sin\frac{\pi}{6} = 1$

$\overline{AP} \perp \beta$, $\overline{AC} \perp \overline{CD}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PC} \perp \overline{CD}$

이면각의 정의에 의하여

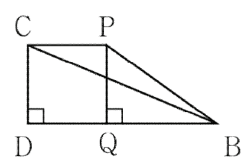
$\angle ACP =$(두 평면 α, β가 이루는 각의 크기)$= \frac{\pi}{4}$

직각삼각형 ACP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AC} = \dfrac{\overline{AP}}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$

직각삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{DC} = \sqrt{\overline{AD}^2 - \overline{AC}^2} = 1$



정사각형 CDQP에서

$\overline{PQ} = \overline{CD} = 1$

직각삼각형 BPQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{QB} = \sqrt{\overline{PB}^2 - \overline{PQ}^2} = \sqrt{2}$

이므로

$\overline{DB}=\overline{DQ}+\overline{QB}=1+\sqrt{2}$

$\overline{BR}\perp\alpha$, $\overline{BD}\perp\overline{DC}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{RD}\perp\overline{DC}$

이면각의 정의에 의하여

$\angle RDB=$(두 평면 α, β가 이루는 각의 크기)$=\dfrac{\pi}{4}$

직각삼각형 RDB에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{BR}=\overline{BD}\times\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

이므로

(사면체 ABCD의 부피)

$=\dfrac{1}{3}\times(\triangle ADC$의 넓이$)\times\overline{BR}$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{6}$

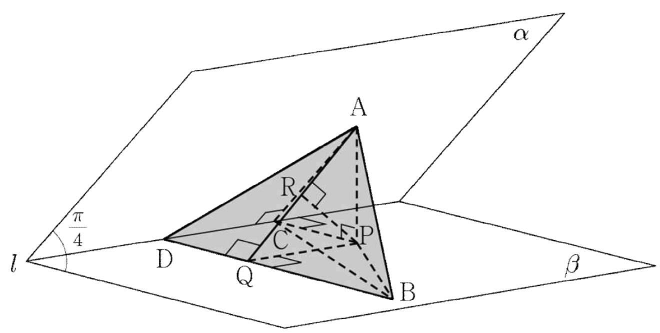
$a=b=\dfrac{1}{6}$이므로

$\therefore\ 36(a+b)=12$

답 12

[풀이3]

점 A에서 평면 β에 내린 수선의 발을 P, 점 P에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 R이라고 하자.



직선과 평면의 수직 관계에 의하여

$\overline{AP}\perp\overline{PB}$

직선과 평면이 이루는 각에 대한 정의에 의하여

$\angle ABP=\dfrac{\pi}{6}$

직각삼각형 ABP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AP}=\overline{AB}\times\sin\dfrac{\pi}{6}=1$, $\overline{BP}=\overline{AB}\times\cos\dfrac{\pi}{6}=\sqrt{3}$

$\overline{AP}\perp\beta$, $\overline{AC}\perp\overline{CD}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PC}\perp\overline{CD}$

이면각의 정의에 의하여

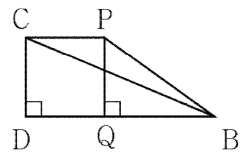
$\angle ACP=$(두 평면 α, β가 이루는 각의 크기)$=\dfrac{\pi}{4}$

직각삼각형 ACP에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AC}=\dfrac{\overline{AP}}{\sin\dfrac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

직각삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{DC}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{AC}^2}=1$



정사각형 CDQP에서

$\overline{PQ}=\overline{CD}=1$

직각삼각형 BPQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{QB}=\sqrt{\overline{PB}^2-\overline{PQ}^2}=\sqrt{2}$

이므로

$\overline{DB}=\overline{DQ}+\overline{QB}=1+\sqrt{2}$

$\overline{AP}\perp\beta$, $\overline{PQ}\perp\overline{QD}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{AQ}\perp\overline{QD}$

직각삼각형 ADQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AQ}=\sqrt{\overline{AD}^2-\overline{DQ}^2}=\sqrt{2}$

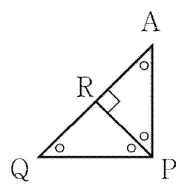
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle ADB$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}\,\overline{AQ}\,\overline{DB}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

$\overline{PQ}\perp\overline{QD}$, $\overline{RQ}\perp\overline{QD}$, $\overline{PR}\perp\overline{RQ}$이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PR}\perp$평면ADB



이등변삼각형의 성질에 의하여

직각이등변삼각형 AQP의 빗변의 중점은 R이다.

직각이등변삼각형 APR에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{PR}=\overline{AP}\times\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

이므로

(사면체 ABCD의 부피)

$=\dfrac{1}{3}\times(\triangle ADB$의 넓이$)\times\overline{PR}$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{2}}{6}$

$a=b=\dfrac{1}{6}$이므로

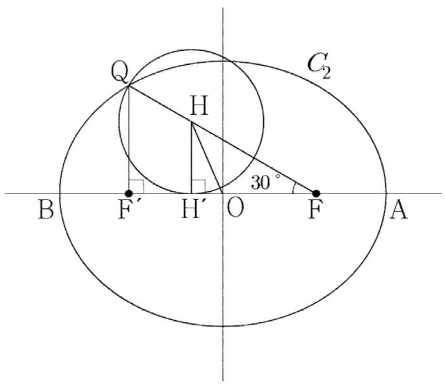
$\therefore\ 36(a+b)=12$

답 12

P021 | 답 ⑤

[풀이]

타원의 중심을 O, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H′라고 하자.



직각삼각형 HH′F에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{HF}}=8$

타원의 정의에 의하여

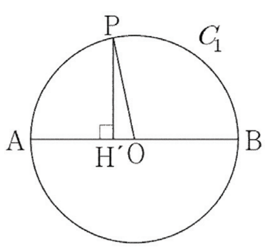
$\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{QF'}}=12+\overline{\mathrm{QF'}}=18,\ \overline{\mathrm{QF'}}=6$

(이때, $\angle \mathrm{QF'F}=90°$)

그리고

$\overline{\mathrm{H'O}}=\overline{\mathrm{F'F}}-\overline{\mathrm{F'H}}-\overline{\mathrm{OF}}$

$=6\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}=\sqrt{3}$



한편 $\overline{\mathrm{PH}}\perp\beta$, $\overline{\mathrm{HH'}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH'}}\perp\overline{\mathrm{AB}}$ (위의 그림)

직각삼각형 PH′O에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH'}}=\sqrt{9^2-(\sqrt{3})^2}=\sqrt{78}$

이면각의 정의에 의하여

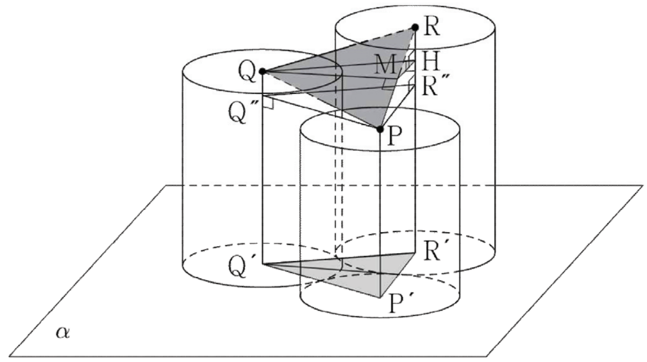
$\therefore\ \cos\theta=\dfrac{\overline{\mathrm{HH'}}}{\overline{\mathrm{PH'}}}=\dfrac{4}{\sqrt{78}}=\dfrac{2\sqrt{78}}{39}$

답 ⑤

P022 | 답 25

[풀이1]

평면 α와 만나는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P′, Q′, R′, 점 P에서 두 선분 QQ′, RR′에 내린 수선의 발을 각각 Q″, R″, 선분 PR의 중점을 각각 M, 점 M에서 선분 RR′에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



두 직각삼각형 PQQ″, PRR″의 밑면의 길이는 같지만, 높이가 다르므로 빗변의 길이가 같을 수 없다. 즉, $\overline{\mathrm{PQ}}\neq\overline{\mathrm{PR}}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{QR}}\neq\overline{\mathrm{PR}}$

귀류법에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$

이등변삼각형 PQR에서 직선 QM은 선분 PR의 수직이등분선이다.

8, a, b는 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2a=8+b$ $\cdots$ ㉠

$(\because\ \overline{\mathrm{QQ''}}=\overline{\mathrm{RH}}=\overline{\mathrm{HR''}})$

$\overline{\mathrm{MH}}//\overline{\mathrm{PR''}}//\overline{\mathrm{P'R'}}$, $\overline{\mathrm{QH}}//\overline{\mathrm{Q'R'}}$

이므로

(평면 QMH)$//\alpha$

이때, 직선 QM은 두 평면 PQR, α의 교선이고,

이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{RPR''}=60°$

직각삼각형 RPR″에서

$\dfrac{\overline{\mathrm{R''R}}}{\overline{\mathrm{PR''}}}=\tan 60°$, 즉 $\dfrac{b-8}{2\sqrt{3}}=\sqrt{3}$, $b=14$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=11$

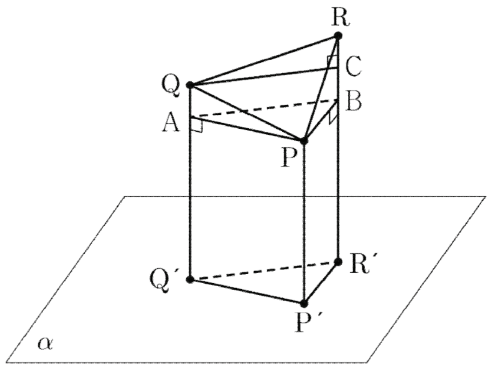
$\therefore\ a+b=25$

답 25

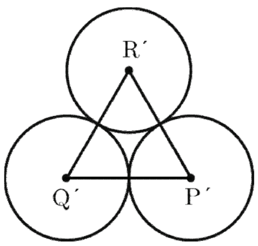
[풀이2]

세 점 P, Q, R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, 점 P에서 두 선분 QQ′, RR′에 내린 수선의 발을

각각 A, B, 점 Q에서 선분 RR′에 내린 수선의 발을 C라고 하자.



세 점 P′, Q′, R′은 각각 세 원기둥의 밑면의 중심이므로 P′Q′R′은 정삼각형이다.



정삼각형의 정의에 의하여

$\overline{P'Q'}=\overline{Q'R'}=\overline{R'P'}$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{PQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+(a-8)^2$

$\overline{QR}^2=\overline{QC}^2+\overline{CR}^2=\overline{QC}^2+(b-a)^2$

$\overline{PR}^2=\overline{PB}^2+\overline{BR}^2=\overline{PB}^2+(b-8)^2$

$\overline{QR}=\overline{RP}$ 라고 가정하면

$(b-a)^2=(b-8)^2$

정리하면

$(8-a)(2b-a-8)=0$

풀면

$a=8$ 또는 $2b=a+8$

$a=8$은 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

$2b=a+8$이면 $a+8=2b>2a$에서 $a<8$이므로 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

따라서 $\overline{QR}\neq\overline{RP}$

$\overline{PQ}=\overline{RP}$ 라고 가정해도 마찬가지 방법으로 주어진 조건에 모순임을 보일 수 있다.

따라서 $\overline{PQ}\neq\overline{RP}$

그러므로

$\overline{PQ}=\overline{QR}$

$(a-8)^2=(b-a)^2$

정리하면

$(2a-8-b)(b-8)=0$

주어진 조건에서 $8>b$이므로

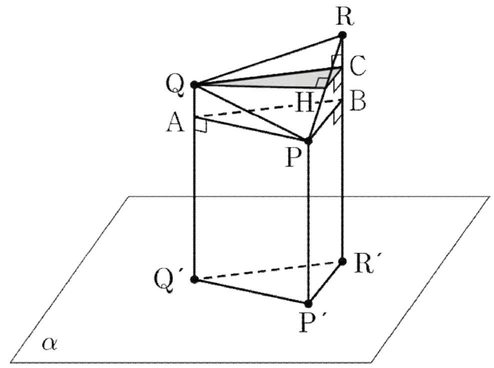
$a=\dfrac{b+8}{2}$ …㉠

두 직각삼각형 PAQ, QCR은 서로 RHS합동이므로

$\overline{QA}=\overline{RC}$

직사각형 QABC에서 $\overline{QA}=\overline{CB}$이므로 $\overline{RC}=\overline{CB}$

선분 RP의 중점을 H라고 하면 점 H는 이등변삼각형 PQR의 꼭짓점 Q에서 변 RP에 내린 수선의 발이다.



직각삼각형 RPB에서

$\overline{RH}:\overline{HP}=\overline{RC}:\overline{CB}$이므로

$\overline{HC}//\overline{PB}(//\overline{P'R'})$

그리고 $\overline{QC}//\overline{Q'R'}$이므로

평면 QHC는 평면 α와 평행하다.

$\overline{RC}\perp$ QHC, $\overline{RH}\perp\overline{HQ}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{CH}\perp\overline{HQ}$

이면각의 정의에 의하여

두 평면 QRP와 QHC($//\alpha$)가 이루는

이면각의 크기는 $\angle$RHC이다.

주어진 조건에 의하여

$\angle \mathrm{RHC}=60^\circ$

평행선의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{RPB}=60^\circ$ (동위각)

직각삼각형 RPB에서 삼각비의 정의에 의하여

$\dfrac{\overline{BR}}{\overline{PB}}=\tan 60^\circ$

대입하면

$\dfrac{b-8}{2\sqrt{3}}=\tan 60^\circ$ 즉, $b=14$ …㉡

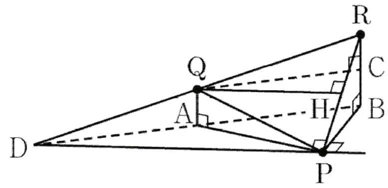
㉡을 ㉠에 대입하면 $a=11$ ∴ $a+b=25$

답 25

[참고]

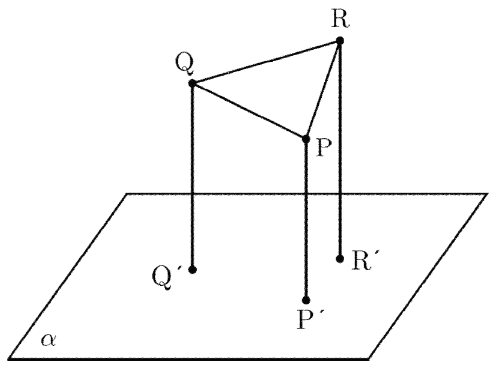
이면각을 다음과 같이 찾을 수 있다.

직선 RQ가 평면 PAB와 만나는 점을 D라고 하자.

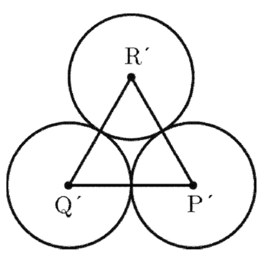


$\overline{\mathrm{PA}} // \alpha$, $\overline{\mathrm{PB}} // \alpha$이므로 $\mathrm{PAB} // \alpha$
두 평면 PQR, PAB가 이루는 각의 크기는 60° 이다.
서로 닮은 두 직각삼각형 RDB, RQC에 대하여
$\overline{\mathrm{RQ}} : \overline{\mathrm{QD}} = \overline{\mathrm{RC}} : \overline{\mathrm{CB}}$이므로 $\overline{\mathrm{RQ}} = \overline{\mathrm{QD}}$
삼각형 RDP에서
$\overline{\mathrm{RQ}} : \overline{\mathrm{QD}} = \overline{\mathrm{RH}} : \overline{\mathrm{HP}}$이므로 $\overline{\mathrm{QH}} // \overline{\mathrm{DP}}$
평행선의 성질에 의하여
$\angle \mathrm{DPR} = \angle \mathrm{QHR} = 90^\circ$ (동위각)
$\overline{\mathrm{RB}} \perp \mathrm{PAB}$, $\overline{\mathrm{DP}} \perp \overline{\mathrm{PR}}$이므로
삼수선의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{DP}} \perp \overline{\mathrm{PB}}$
이면각의 정의에 의하여 두 평면 PQR, PAB가 이루는 각의 크기는 $\angle \mathrm{RPB}$이다.
$\therefore\ \angle \mathrm{RPB} = 60^\circ$

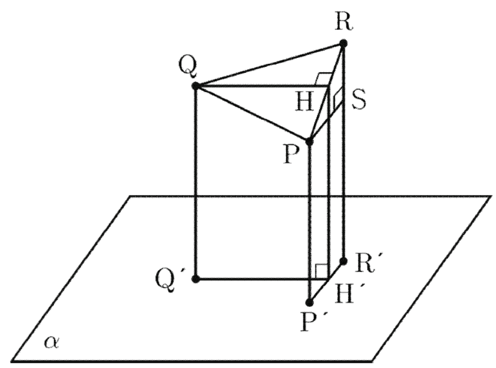
[풀이3] (선택)
세 점 P, Q, R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′이라고 하자.



세 점 P′, Q′, R′은 각각 세 원기둥의 밑면의 중심이므로 P′Q′R′은 정삼각형이다.



정삼각형의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{P'Q'}} = \overline{\mathrm{Q'R'}} = \overline{\mathrm{R'P'}}$
피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{PQ}}^2 = \overline{\mathrm{P'Q'}}^2 + (a-8)^2$
$\overline{\mathrm{QR}}^2 = \overline{\mathrm{Q'R'}}^2 + (b-a)^2$
$\overline{\mathrm{RP}}^2 = \overline{\mathrm{R'P'}}^2 + (b-8)^2$
$\overline{\mathrm{QR}} = \overline{\mathrm{RP}}$라고 가정하면
$(b-a)^2 = (b-8)^2$
정리하면
$(8-a)(2b-a-8) = 0$
풀면
$a = 8$ 또는 $2b = a+8$
$a = 8$은 주어진 조건 $a > 8$에 모순이다.
$2b = a+8$이면 $a+8 = 2b > 2a$에서 $a < 8$이므로 주어진 조건 $a > 8$에 모순이다.
따라서 $\overline{\mathrm{QR}} \neq \overline{\mathrm{RP}}$
$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{RP}}$라고 가정해도 마찬가지 방법으로 주어진 조건에 모순임을 보일 수 있다.
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}} \neq \overline{\mathrm{RP}}$
그러므로
$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{QR}}$
$(a-8)^2 = (b-a)^2$
정리하면
$(2a-8-b)(b-8) = 0$
주어진 조건에서 $8 > b$이므로
$a = \dfrac{b+8}{2}$ $\cdots$ ㉠
이제 선분 RP의 중점을 H, 점 H에서 평면 α에 내린 수선의 발을 H′라고 하자. 이때, H는 이등변삼각형 PQR의 꼭짓점 Q에서 변 RP에 내린 수선의 발이다.



㉠에 의하여
$\overline{\mathrm{QQ'}} = \overline{\mathrm{HH'}}$
□QQ′H′H는 직사각형이므로
$\overline{\mathrm{QH}} // \overline{\mathrm{Q'H'}}$
평면 α에 직선 HH′이 수직이므로
$\alpha \perp$(평면 PHH′)
평면 PHH′에 직선 QH가 수직이므로
(평면 PQR)$\perp$(평면 PHH′)
이면각의 정의에 의하여 두 평면 PQR, α가 이루는 각의 크

기는 두 직선 PR, P′R′이 이루는 각의 크기와 같다.
점 P에서 선분 RR′에 내린 수선의 발을 S라고 하자.
직각삼각형 PSR에서

$$\frac{\overline{\mathrm{SR}}}{\overline{\mathrm{PS}}}=\tan\frac{\pi}{3}$$

대입하면

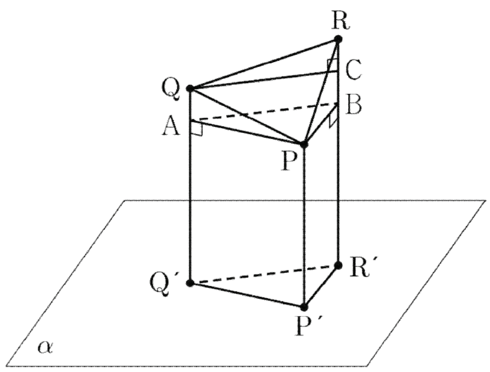
$$\frac{b-8}{2\sqrt{3}}=\tan\frac{\pi}{3} \text{ 즉, } b=14 \qquad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a=11$

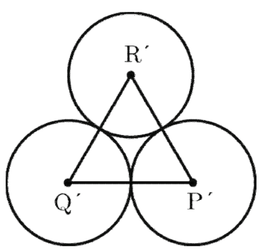
$\therefore\ a+b=25$

답 25

[풀이4] (정사영)
세 점 P, Q, R에서 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 P′, Q′, R′, 점 P에서 두 선분 QQ′, RR′에 내린 수선의 발을 각각 A, B, 점 Q에서 선분 RR′에 내린 수선의 발을 C라고 하자.



세 점 P′, Q′, R′은 각각 세 원기둥의 밑면의 중심이므로 P′Q′R′은 정삼각형이다.



정삼각형의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{P'Q'}}=\overline{\mathrm{Q'R'}}=\overline{\mathrm{R'P'}}$

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+(a-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+\overline{\mathrm{CR}}^2=\overline{\mathrm{QC}}^2+(b-a)^2$

$\overline{\mathrm{PR}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2=\overline{\mathrm{PB}}^2+(b-8)^2$

$\overline{\mathrm{QR}}=\overline{\mathrm{RP}}$라고 가정하면

$(b-a)^2=(b-8)^2$

정리하면

$(8-a)(2b-a-8)=0$

풀면

$a=8$ 또는 $2b=a+8$

$a=8$은 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

$2b=a+8$이면 $a+8=2b>2a$에서 $a<8$이므로 주어진 조건 $a>8$에 모순이다.

따라서 $\overline{\mathrm{QR}}\neq\overline{\mathrm{RP}}$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{RP}}$라고 가정해도 마찬가지 방법으로 주어진 조건에 모순임을 보일 수 있다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}\neq\overline{\mathrm{RP}}$

그러므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{QR}}$

$(a-8)^2=(b-a)^2$

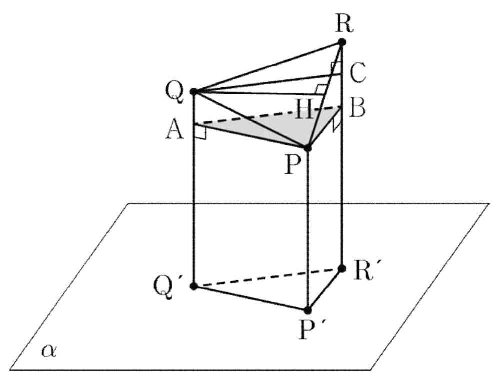
정리하면

$(2a-8-b)(b-8)=0$

주어진 조건에서 $8>b$이므로

$$a=\frac{b+8}{2} \qquad \cdots ㉠$$

선분 RP의 중점을 H라고 하면 점 H는 이등변삼각형 PQR의 꼭짓점 Q에서 변 RP에 내린 수선의 발이다.



두 직각삼각형 PAQ, PBR, QPH에서
피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{AQ}}^2}=\sqrt{12+(a-8)^2}$

$\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{BR}}^2}=\sqrt{12+(b-8)^2}$

$=2\sqrt{3+(a-8)^2}\ (\because ㉠)$

$\overline{\mathrm{QH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{PH}}^2}=3$

두 삼각형 PQR, PAB의 넓이를 각각 S, S'라고 하자.
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PR}}\times\overline{\mathrm{QH}}=3\sqrt{3+(a-8)^2}$$

$$S'=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\overline{\mathrm{PA}}^2=3\sqrt{3}$$

넓이의 정사영에 대한 공식에 의하여

$$\frac{S'}{S}=\cos 60^\circ$$

대입하면

$$\frac{3\sqrt{3}}{3\sqrt{3+(a-8)^2}}=\frac{1}{2}$$

양변을 제곱하여 풀면

$a=11(\because a>8)$

이를 ㉠에 대입하면

$b=14$

$\therefore\ a+b=25$

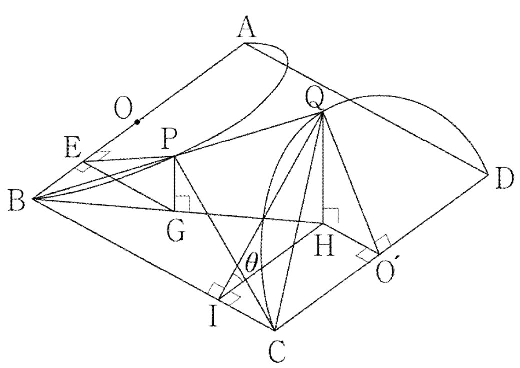
답 25

P023 | 답 40

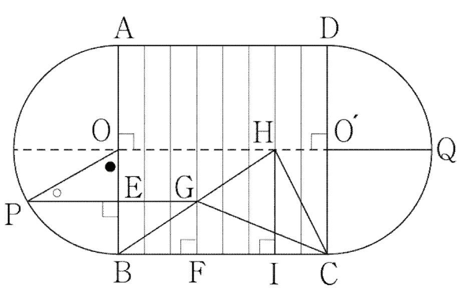
[풀이1]

점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 점 Q에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 I, 점 G에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 F라고 하자. 그리고 아래 그림처럼 두 반원의 중심을 각각 O, O′라고 하자.

입체도형을 그리면 아래 그림과 같다.



전개도를 그리면 아래 그림과 같다.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

$\overline{PE}\perp\overline{AB}$, $\overline{PG}\perp$(평면ABCD)

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{EG}\perp\overline{AB}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{HO'}\perp\overline{CD}$

직각삼각형 OPE에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OE}=2$, $\overline{PE}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 PEG에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{EG}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$

마찬가지의 방법으로

$\overline{HO'}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

정리하면

$\overline{BI}=6$, $\overline{HI}=4$, $\overline{BF}=3$, $\overline{GF}=2$

이므로 두 직각삼각형 HBI, GBF는 서로 닮음이다.

이때, 직선 QP가 평면 ABCD와 만나는 점은 B이다.

즉, 두 평면 PCQ(QBC), ABCD의 교선은 BC이다.

이면각의 정의에 의하여

$\angle QIH=\theta$

이므로

$$\cos\theta=\frac{\overline{IH}}{\overline{QI}}=\frac{4}{\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$$

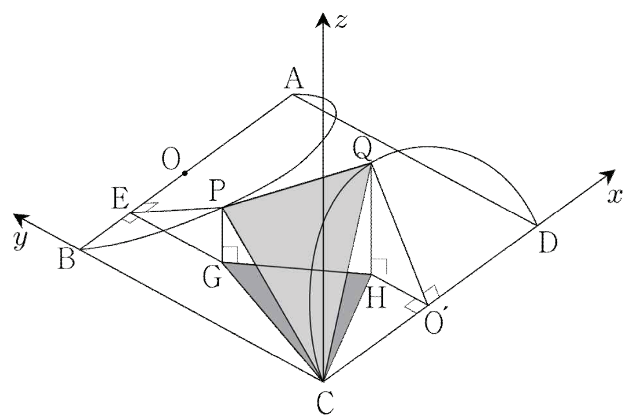
$$\therefore\ 70\cos^2\theta=70\times\frac{4}{7}=40$$

답 40

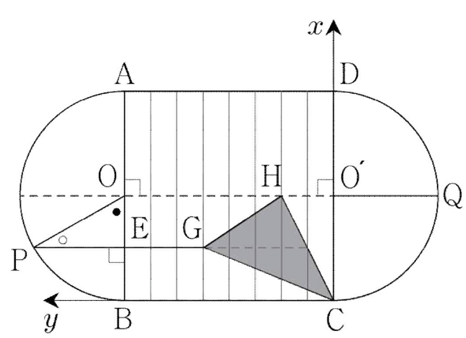
[풀이2]

아래 그림처럼 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E, 두 반원의 중심을 각각 O, O′라고 하자. 그리고 C가 원점이고, 반직선 CD, CB가 각각 x축, y축이 되도록 공간좌표를 도입하자.

입체도형을 그리면 아래 그림과 같다.



전개도를 그리면 아래 그림과 같다.



(단, ●$=60^\circ$, ○$=30^\circ$)

$\overline{PE}\perp\overline{AB}$, $\overline{PG}\perp$(평면ABCD)

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{EG} \perp \overline{AB}$

마찬가지의 방법으로

$\overline{HO'} \perp \overline{CD}$

직각삼각형 OPE에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{OE}=2$, $\overline{PE}=2\sqrt{3}$

직각삼각형 PEG에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{EG}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2}=3$

마찬가지의 방법으로

$\overline{HO'}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$

이상에서 다음의 결과를 얻는다.

$C(0,\ 0,\ 0)$, $H(4,\ 2,\ 0)$, $G(2,\ 5,\ 0)$,

$P(2,\ 5,\ \sqrt{3})$, $Q(4,\ 2,\ 2\sqrt{3})$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{CP}=4\sqrt{2}$, $\overline{CQ}=4\sqrt{2}$, $\overline{PQ}=4$

이므로 삼각형 CPQ는 이등변삼각형이다.

$(\triangle CPQ\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

그리고 위의 그림에서

$(\triangle CGH\text{의 넓이})=\frac{1}{2}\times 4\times 4=8$

넓이의 정사영의 공식에 의하여

$\cos\theta=\frac{8}{4\sqrt{7}}=\frac{2}{\sqrt{7}}$

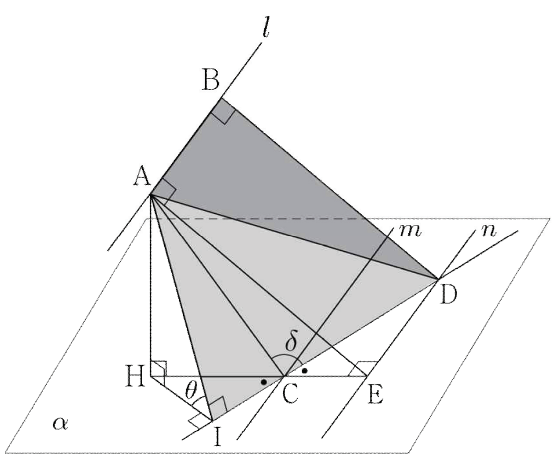
$\therefore\ 70\cos^2\theta=70\times\frac{4}{7}=40$

답 40

P024 | 답 30

[풀이1]

점 A에서 직선 n, 평면 α, 직선 CD에 내린 수선의 발을 각각 E, H, I라고 하자. 그리고 $\angle ACD=\delta$라고 하자.



삼각형 ADB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AD}=\sqrt{(2\sqrt{2})^2+(4\sqrt{2})^2}=2\sqrt{10}$

삼각형 ACD에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\delta=\frac{5^2+3^2-(2\sqrt{10})^2}{2\times 5\times 3}=-\frac{1}{5}$

이므로 $\cos(\angle ACI)=\frac{1}{5}$, $\sin(\angle ACI)=\frac{2\sqrt{6}}{5}$

직각삼각형 ACI에서

$\overline{AI}=2\sqrt{6}$, $\overline{CI}=1$

직각삼각형 CED에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{CE}=\sqrt{3^2-(2\sqrt{2})^2}=1$

($\because$ 직사각형 AEDB에서 $\overline{ED}=\overline{AB}=2\sqrt{2}$)

서로 합동인 두 직각삼각형 CED, CIH의 세 변의 길이는 각각 1, $2\sqrt{2}$, 3이다.

이때, $\overline{IH}=2\sqrt{2}$이므로 직각삼각형 AHI에서

$\overline{AH}=\sqrt{(2\sqrt{6})^2-(2\sqrt{2})^2}=4$

$\angle AIH=\theta$(이면각)이므로

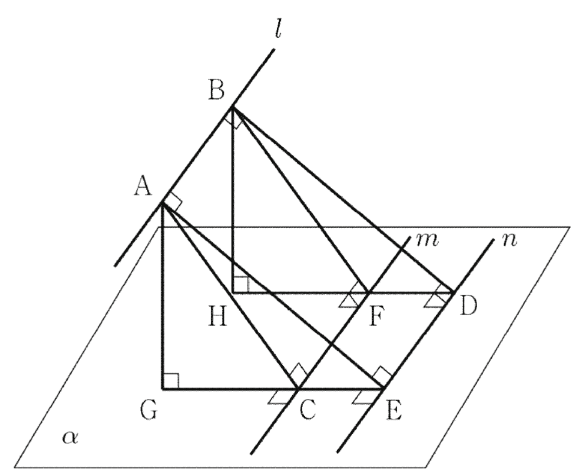
$\tan\theta=\frac{4}{2\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

$\therefore\ 15\tan^2\theta=30$

답 30

[풀이2] ★

서로 평행한 두 직선 m, n으로 결정되는 평면을 α라고 하자.
점 A에서 직선 n과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, G, 점 B에서 직선 m과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 F, H라고 하자.



네 점 A, E, D, B는 서로 평행한 두 직선 l, n으로 결정되는 평면 위에 있다.

$\angle DBA=\angle AED=90^\circ$

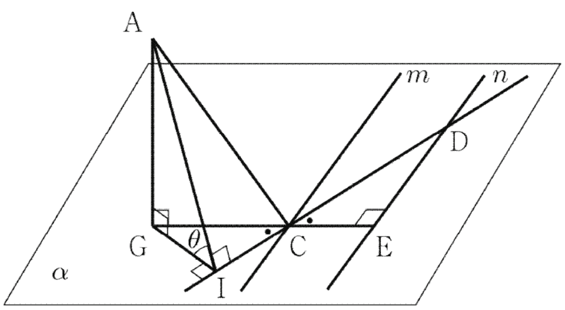
$\overline{AB}//\overline{ED}$이므로 평행선의 성질에 의하여

$\angle EDB=\angle BAE=90^\circ$

직사각형의 정의에 의하여 □AEDB는 직사각형이다.

마찬가지의 방법으로 □ACFB는 직사각형이다.

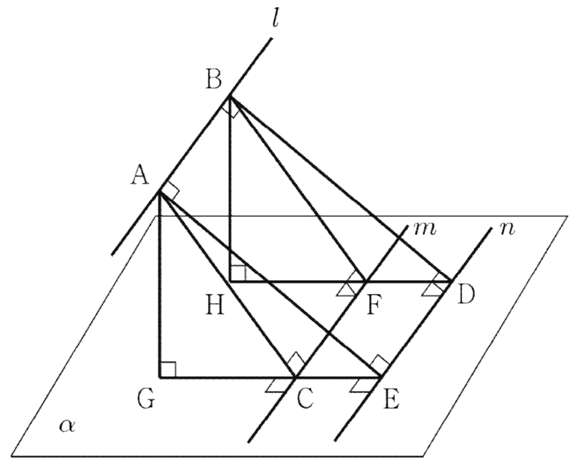
$\overline{AG} \perp \alpha$, $\overline{AE} \perp n$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{EG} \perp n$ …㉠
마찬가지의 방법으로
$\overline{CG} \perp m$ …㉡
㉠, ㉡에 의하여 세 점 G, C, E는 한 직선 위에 있다.
마찬가지의 방법으로
세 점 H, F, D는 한 직선 위에 있다.
□CEDF의 네 내각의 크기가 모두 같으므로
직사각형의 정의에 의하여 □CEDF는 직사각형이다.
직사각형 AEDB에서 $\overline{DE}=\overline{BA}=2\sqrt{2}$ 이므로
직각삼각형 DCE에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{CE}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{DE}^2}=1$
직사각형 AEDB에서
$\overline{AE}=\overline{BD}=4\sqrt{2}$
$\overline{AG}=a$, $\overline{GC}=b$로 두자.
직각삼각형 AGC에서 피타고라스의 정리에 의하여
$5^2=a^2+b^2$
직각삼각형 AGE에서 피타고라스의 정리에 의하여
$(4\sqrt{2})^2=a^2+(b+1)^2$
a, b에 대한 연립방정식을 풀면
$a=4$, $b=3$
점 A에서 직선 CD에 내린 수선의 발을 I라고 하자.



$\overline{CG}=\overline{CD}$, $\angle GCI=\angle DCE$(맞꼭지각)
이므로 RHA합동 조건에 의하여
두 직각삼각형 GCI, DCE는 서로 합동이다.
$\overline{IG}=\overline{ED}=2\sqrt{2}$
$\overline{AI} \perp \overline{CD}$, $\overline{AG} \perp \alpha$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{IG} \perp \overline{CD}$
두 평면 α, ACD가 이루는 각의 크기는 θ이므로
이면각의 정의에 의하여
$\angle AIG=\theta$
직각삼각형 AIG에서 삼각비의 정의에 의하여
$\tan\theta=\dfrac{\overline{GA}}{\overline{IG}}=\sqrt{2}$

$\therefore\ 15\tan^2\theta=30$
답 30

[풀이3] (정사영)
서로 평행한 두 직선 m, n으로 결정되는 평면을 α라고 하자.
점 A에서 직선 n과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 E, G,
점 B에서 직선 m과 평면 α에 내린 수선의 발을 각각 F, H
라고 하자.



네 점 A, E, D, B는 서로 평행한 두 직선 l, n으로 결정되는 평면 위에 있다.
$\angle DBA=\angle AED=90^\circ$
$\overline{AB}//\overline{ED}$이므로 평행선의 성질에 의하여
$\angle EDB=\angle BAE=90^\circ$
직사각형의 정의에 의하여
□AEDB는 직사각형이다.
마찬가지의 방법으로
□ACFB는 직사각형이다.
$\overline{AG} \perp \alpha$, $\overline{AE} \perp n$
이므로 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{EG} \perp n$ …㉠
마찬가지의 방법으로
$\overline{CG} \perp m$ …㉡
㉠, ㉡에 의하여 세 점 G, C, E는 한 직선 위에 있다.
마찬가지의 방법으로
세 점 H, F, D는 한 직선 위에 있다.
□CEDF의 네 내각의 크기가 모두 같으므로
직사각형의 정의에 의하여 □CEDF는 직사각형이다.
직사각형 AEDB에서 $\overline{DE}=\overline{BA}=2\sqrt{2}$ 이므로
직각삼각형 DCE에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{CE}=\sqrt{\overline{DC}^2-\overline{DE}^2}=1$
직사각형 AEDB에서
$\overline{AE}=\overline{BD}=4\sqrt{2}$
$\overline{AG}=a$, $\overline{GC}=b$로 두자.

직각삼각형 AGC에서 피타고라스의 정리에 의하여

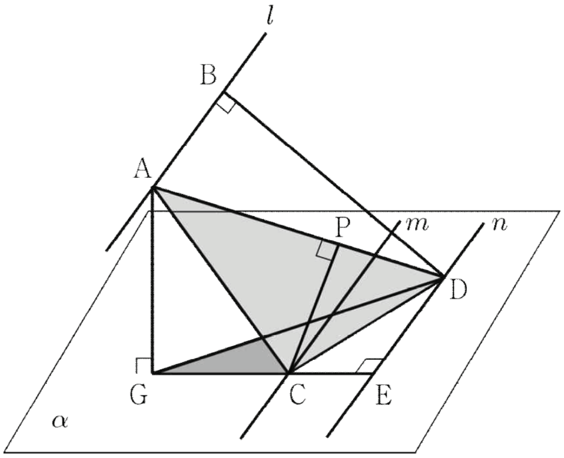
$5^2=a^2+b^2$

직각삼각형 AGE에서 피타고라스의 정리에 의하여

$(4\sqrt{2})^2=a^2+(b+1)^2$

a, b에 대한 연립방정식을 풀면

$a=4$, $b=3$



삼각형 ACD의 평면 α 위로의 정사영은 삼각형GCD이다.

두 삼각형 ACD, GCD의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

직각삼각형 ADB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BD}^2}=2\sqrt{10}$

점 C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 P,

$\overline{CP}=c$, $\overline{AP}=d$라고 하자.

직각삼각형 ACP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$5^2=c^2+d^2$

직각삼각형 CDP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$3^2=c^2+(2\sqrt{10}-d)^2$

c, d에 대한 연립방정식을 풀면

$c=\dfrac{3\sqrt{15}}{5}$, $d=\dfrac{7\sqrt{10}}{5}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{AD}\times\overline{CP}=3\sqrt{6}$

$T=\dfrac{1}{2}\times\overline{GC}\times\overline{ED}=3\sqrt{2}$

두 평면 ACD, α가 이루는 각의 크기가 θ이므로

정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여

$\cos\theta=\dfrac{T}{S}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

θ는 예각이므로

$\tan\theta=\sqrt{2}$

$\therefore\ 15\tan^2\theta=30$

답 30

P025 | 답 10

[풀이1]

문제에서 주어진 그림에서 관찰을 하면 아래의 기하적인 상황을 빠르게 파악할 수 있다.

$\overline{OA}\perp\beta$이므로 조건 (나)에서

$\overline{OP}\perp\overline{OA}$

이때, 네 점 A, Q, P, O는 한 평면 위에 있다.

만약 두 직선 OP, OA가 서로 수직이 아니면 두 직선 OP, AQ는 서로 꼬인 위치에 있게 된다.

문제에서 주어진 그림에서 두 직선 AQ, OP가 모두 '두 평면 α, β의 교선'에 평행하면 $\overline{OP}\perp\overline{OA}$임을 알 수 있다.

문제에서 주어진 그림에서

$\overline{OA}=\sqrt{3}$이므로

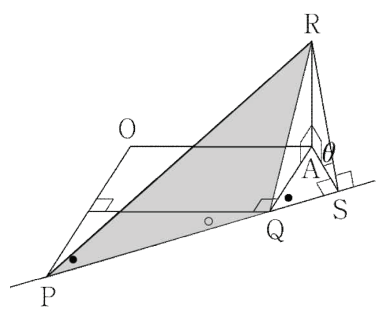
$\overline{AQ}=\overline{AR}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

그리고 $\overline{OP}=2$이다.

아래 그림처럼 점 Q에서 직선 OP에 내린 수선의 발은 선분 OP의 중점이고, 세 개의 각의 크기가 ● 또는 ○로 결정된다.

그리고 점 R에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 S라고 하자.

이때, 삼수선의 정리와 이면각의 정의에 의해서 $\angle RSA=\theta$이다.



(단, ●$=60°$, ○$=30°$)

$\overline{AS}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{AR}=1$이므로

$\overline{RS}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$

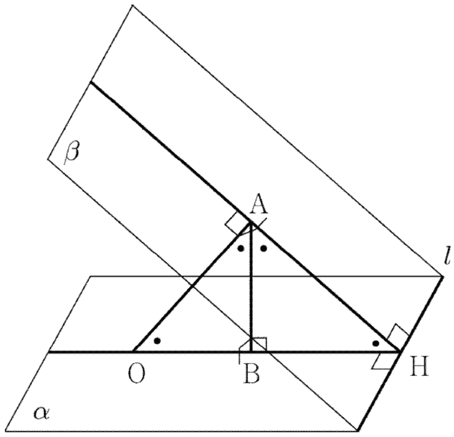
$\therefore\ \cos^2\theta=\dfrac{3}{7}$

$\therefore\ p+q=10$

답 10

[풀이2]

두 평면 α와 β의 교선을 l, 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B, 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{\mathrm{AB}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{BH}} \perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}} \perp l$ … ㉠

점 A는 주어진 구를 잘라서 생긴 원 C_2의 중심이므로

$\overline{\mathrm{OA}} \perp \beta$ … ㉡

㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}} \perp l$

두 직선 OH, BH는 각각 직선 l에 수직이므로

세 점 O, B, H는 한 직선 위에 있다.

평면 ABH는 직선 BH를 포함하므로 점 O는 평면 ABH 위에 있다.

직각삼각형 ABH의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle \mathrm{HAB} = 45^\circ$

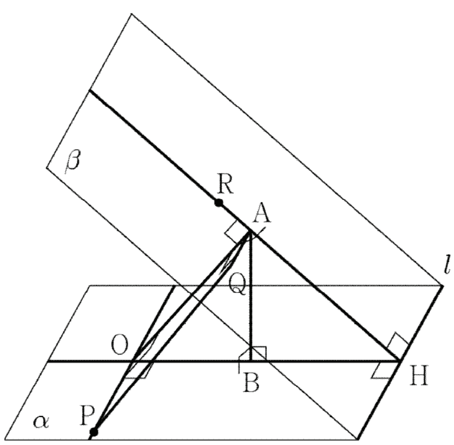
$\angle \mathrm{HAO} = 90^\circ$이므로 $\angle \mathrm{BAO} = 45^\circ$

직각삼각형 AOB의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle \mathrm{AOB} = 45^\circ$

직각삼각형 AOB에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{3}$ … ㉢



직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}} \perp \beta$에서 $\overline{\mathrm{OA}} \perp \overline{\mathrm{AQ}}$

조건 (나)에서 OP//AQ이므로

$\angle \mathrm{POA} = 90^\circ$

한편

$\overline{\mathrm{AB}} \perp \alpha$, $\overline{\mathrm{AO}} \perp \overline{\mathrm{OP}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BO}} \perp \overline{\mathrm{OP}}$

이를 만족시키는 원 C_1 위의 점 P의 개수는 2이다.

이 두 점 중에서 어떤 점을 잡아도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

OH(OB)$\perp l$이므로

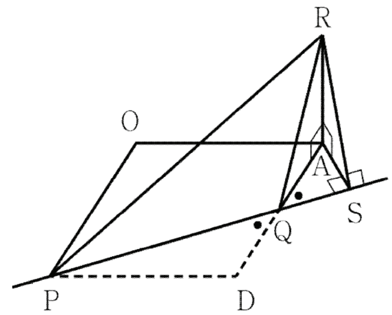
OP//l

조건 (나)에서 OP//AQ이므로

AQ//l

즉, 세 직선 l, OP, AQ는 평행하다. 이때, 네 점 A, Q, P, O는 한 평면 위에 있다.

점 R에서 직선 PQ에 내린 수선의 발을 S, 점 P를 지나고 직선 OA에 평행한 직선과 직선 AQ의 교점을 D라고 하자.



직각삼각형 OAQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2 - \overline{\mathrm{OA}}^2} = 1 (\because ㉢)$

직각삼각형 PDQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\tan(\angle \mathrm{DQP}) = \dfrac{\overline{\mathrm{DP}}}{\overline{\mathrm{QD}}} = \sqrt{3}$

이므로 특수각의 삼각비에 의하여

$\angle \mathrm{DQP} = 60^\circ$

맞꼭지각의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{AQS} = 60^\circ$

직각삼각형 AQS에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{AS}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

직각삼각형 RSA에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{RS}} = \sqrt{\overline{\mathrm{SA}}^2 + \overline{\mathrm{AR}}^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$

한편

$\overline{\mathrm{RA}} \perp \overline{\mathrm{AQ}}$($\because$ 조건(가)), $\overline{\mathrm{RA}} \perp \overline{\mathrm{OA}}$($\because \overline{\mathrm{OA}} \perp \beta$)

직선과 평면의 수직에 대한 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{RA}} \perp \mathrm{AOPQ}$

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AS}} \perp \overline{\mathrm{PQ}}$

이면각의 정의에 의하여

$\angle \mathrm{RSA} = \theta$

직각삼각형 RSA에서 삼각비의 정의에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{\mathrm{SA}}}{\overline{\mathrm{RS}}}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

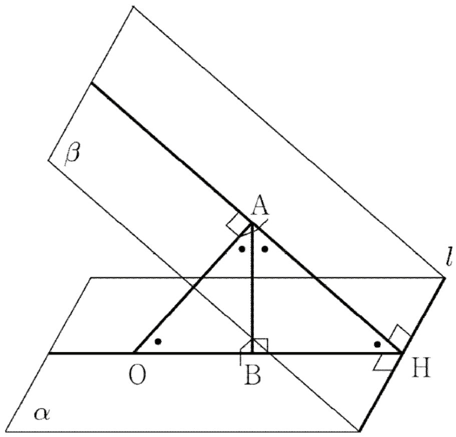
$\cos^2\theta=\frac{3}{7}$이므로 $p=7$, $q=3$

$\therefore\ p+q=10$

답 10

[풀이3] (정사영)

두 평면 α와 β의 교선을 l, 점 A에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B, 점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



$\overline{\mathrm{AB}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{BH}}\perp l$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AH}}\perp l$ …㉠

점 A는 주어진 구를 잘라서 생긴 원 C_2의 중심이므로

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\beta$ …㉡

㉠, ㉡에서 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{OH}}\perp l$

두 직선 OH, BH는 각각 직선 l에 수직이므로

세 점 O, B, H는 한 직선 위에 있다.

평면 ABH가 직선 BH를 포함하므로 점 O는 평면 ABH 위에 있다.

직각삼각형 ABH의 세 내각의 합은 180° 이므로

$\angle\mathrm{HAB}=45^\circ$

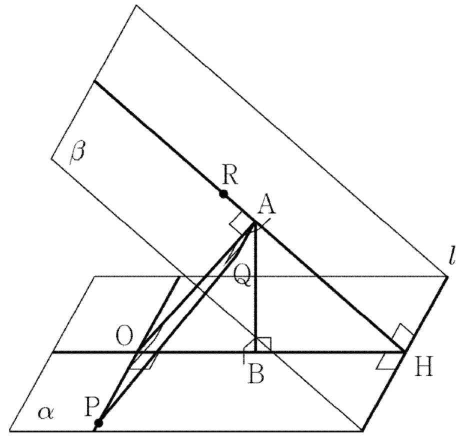
$\angle\mathrm{HAO}=90^\circ$ 이므로 $\angle\mathrm{BAO}=45^\circ$

직각삼각형 AOB의 세 내각의 합은 180° 이므로

$\angle\mathrm{AOB}=45^\circ$

직각삼각형 AOB에서 특수각의 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{3}$ …㉢



직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{OA}}\perp\beta$에서 $\overline{\mathrm{OA}}\perp\overline{\mathrm{AQ}}$

조건 (나)에서 OP//AQ이므로

$\angle\mathrm{POA}=90^\circ$

한편

$\overline{\mathrm{AB}}\perp\alpha$, $\overline{\mathrm{AO}}\perp\overline{\mathrm{OP}}$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BO}}\perp\overline{\mathrm{OP}}$

이를 만족시키는 원 C_1 위의 점 P의 개수는 2이다.

이 두 점 중에서 어떤 점을 잡아도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

OH(OB)$\perp l$이므로

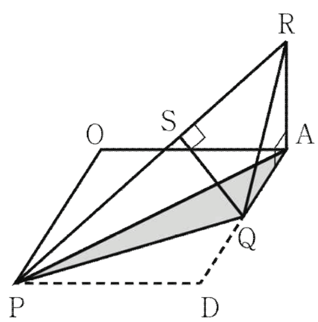
OP//l

조건 (나)에서 OP//AQ이므로

AQ//l

즉, 세 직선 l, OP, AQ는 평행하다. 이때, 네 점 A, Q, P, O는 한 평면 위에 있다.

점 Q에서 직선 PR에 내린 수선의 발을 S, 점 P를 지나고 직선 OA에 평행한 직선과 직선 AQ의 교점을 D라고 하자.



두 삼각형 PQR, PQA의 넓이를 각각 S, T라고 하자.

직각삼각형 OAQ에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AQ}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}=1(\because ㉢)$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

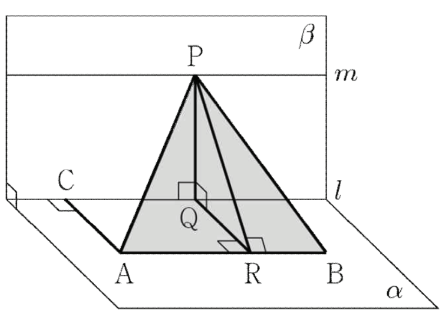
$$T=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AQ}}\times\overline{\mathrm{DP}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

한편

$\overline{RA}\perp\overline{AQ}$($\because$ 조건(가)), $\overline{RA}\perp\overline{OA}$($\because \overline{OA}\perp\beta$)
직선과 평면의 수직에 대한 정리에 의하여
$\overline{RA}\perp AOPQ$
직선과 평면의 수직에 대한 정의에 의하여
$\overline{RA}\perp\overline{AP}$
직각삼각형 PDA에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PA}=\sqrt{\overline{PD}^2+\overline{DA}^2}=\sqrt{7}$
직각삼각형 PAR에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PA}^2+\overline{AR}^2}=2\sqrt{2}$
$\overline{QS}=a$, $\overline{SP}=b$로 두자.
두 직각삼각형 PQS, QRS에서 피타고라스의 정리에 의하여
$a^2+b^2=2^2$, $a^2+(2\sqrt{2}-b)^2=(\sqrt{2})^2$
a, b에 대한 연립방정식을 풀면
$a=\dfrac{\sqrt{14}}{4}$, $b=\dfrac{5\sqrt{2}}{4}$
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
$S=\dfrac{1}{2}\times\overline{PR}\times\overline{QS}=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$
점 R에서 평면 AOPQ에 내린 수선의 발은 A이므로 삼각형 PQR의 평면 AOPQ 위로의 정사영은 삼각형 PQA이다. 정사영의 넓이에 대한 공식에 의하여
$\cos\theta=\dfrac{T}{S}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$
$\cos^2\theta=\dfrac{3}{7}$이므로 $p=7$, $q=3$
$\therefore\ p+q=10$
답 10

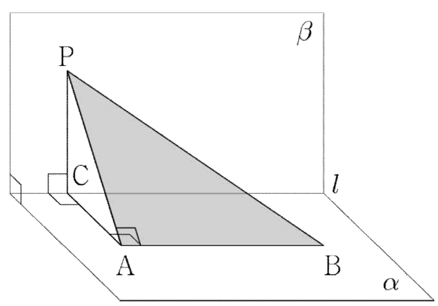
P026 | 답 15

[풀이1]
두 평면 α와 β의 교선을 l이라고 하자.



문제에서 주어진 조건에 의하여
$AB/\!/\beta$이므로 $AB/\!/l$
점 A에서 교선 l에 내린 수선의 발을 C라고 하자.
$\alpha\perp\beta$이므로 $\overline{AC}\perp\beta$
점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이므로
$\overline{AC}=2$
점 P에서 교선 l에 내린 수선의 발을 Q라고 하자.
$\alpha\perp\beta$이므로 $\overline{PQ}\perp\alpha$
점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로
$\overline{PQ}=4$
점 Q에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 R이라고 하자.
$\overline{PQ}\perp\alpha$, $\overline{QR}\perp\overline{AB}$이므로
삼수선의 정리에 의하여
$\overline{PR}\perp\overline{AB}$
직각삼각형 PQR에서 피타고라스의 정리에 의하여
$\overline{PR}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QR}^2}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$
($\because$ □ARQC가 직사각형이므로 $\overline{QR}=\overline{CA}$)
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
($\triangle$PAB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PR}$
$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=15$
※ 점 P의 자취를 m이라고 할 때, 삼각형 PAB는 두 직선 m과 AB로 결정되는 평면 위에 있다.
답 15

[풀이2] 시험장
점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발을 C라고 하자. 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 A라고 해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다. 이때, 삼수선의 정리에 의하여
$\overline{PA}\perp\overline{AB}$
이다. 그리고 두 평면 α, β의 교선을 l이라고 하면 점 C는 직선 l 위에 있다.



문제에서 주어진 조건에 의하여
$\overline{AC}=2$, $\overline{PC}=4$
이므로 직각삼각형 PCA에서
$\overline{PA}=2\sqrt{5}$
$\therefore$ ($\triangle$PAB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times2\sqrt{5}=15$
답 15