<필기노트 보는 법>

백그라운드 필기노트는 2022 개정 교육과정을 기준으로 작성되었습니다.

이에 따라 고등학교 교육과정, 중학교 교육과정, 교육과정 외 이렇게 세 분류로 나누어서 작성하였습니다.

고등학생이라면 꼭 알아야하는 교육과정 내용을 노란색 포스트잇으로 표시하였습니다.

절대 몰라서는 안되는 필수 개념을 담았습니다. 눈 감고도 설명할 수 있을 정도로 열심히 공부합시다.

고등학교 내신과 수능에서도 자주 쓰이는 중학교 교육과정도 같이 수록하였습니다.

중학교 때 내가 공부를 하지 않았더라도 이 내용을 차근차근 읽어보면서 빠진 부분을 복습해보세요.

수능에서는 다루지 않는 초월함수의 미적분, 기하(내신에서는 다룸)와

과학고등학교에서 배우는 심화수학, 고급수학에서 다루는 내용을 담았습니다.

수능에서 나오지는 않지만 알고 있으면 도움이 될 수도 있으니 한 번 읽어만 보고 넘어갑시다.

대신 이과, 공과대학에 진학 예정인 새내기라면 꼭 공부하고 입학하도록 해요.

CONTENTS

백그라운드 고등수학 필기노트

Chap 1

다항식

Theme 01

다항식

다항식에 관련된 용어

단항식 : 숫자와 문자, 문자와 문자의 곱으로만 이루어진 식

다항식 : 단항식의 합으로 이루어진 식

항 : 다항식 속 각각의 단항식

변수 : 수식에 따라서 변하는 값 → "x에 대한 다항식"

계수 : 항에서 변수를 제외한 나머지 부분

상수항 : 특정 문자를 포함하지 않거나 숫자만 있는 항

차수
- 항의 차수 : 하나의 항에서 곱해진 문자의 개수
- 다항식의 차수 : 다항식에서 각 항의 차수 중 가장 큰 값

동류항 : 문자와 차수가 같은 항

내림차순 : 특정 문자의 차수가 높은 항부터 낮아지는 순서로 나열하는 것

오름차순 : 특정 문자의 차수가 낮은 항부터 높아지는 순서로 나열하는 것

(ex) $5x^2-6xy+4y+2$
- 항이 4개인 이차식
- $5x^2$, $-6xy$는 이차항
- $4y$는 일차항
- 2는 상수항
- $5x^2$의 계수는 5
- $-6xy$의 계수는 -6
- $-6xy$
  - x에 대한 일차항
  - y에 대한 일차항
- x에 대한 내림차순

자연수에서의 지수법칙

거듭제곱 : 같은 수를 여러 번 곱한 것

밑 : 거듭제곱에서 곱한 수

지수 : 거듭제곱에서 밑이 곱해진 횟수

$$5\times5\times5\times5 = 5^4$$

지수: 4, 밑: 5

a와 b가 0이 아닌 실수이고 m과 n이 자연수일 때,

$a^m\times a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$$a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m > n) \\ 1 & (m = n) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m < n) \end{cases}$$

$(ab)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Chap 01

분배법칙

$$(a+b)x = ax+bx$$

$$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$$

다항식의 연산

다항식의 덧셈과 뺄셈

① 괄호가 있을 때는 괄호부터 푼다. 이때, 괄호 앞에 (−) 부호가 있으면 괄호 안의 각 항의 부호를 반대로 바꾼다.

② 다항식을 한 문자에 대해 내림차순으로 정리한다.

③ 동류항끼리 모아서 계산한다.

다항식의 곱셈

지수법칙과 분배법칙을 이용하여 전개하고 동류항끼리 모아서 정리한다.

☆

다항식의 나눗셈

다항식 A를 B(B ≠ 0)로 나눈 몫을 Q, 나머지를 R라 하면 A = BQ+R이 성립하고 이때 (R의 차수) < (B의 차수)이다.

특히, R = 0이면 나누어떨어진다고 한다.

(ex)

$(x+3)(2x-1)-(2x-4) = 2x^2-x+6x-3-2x+4 = 2x^2+3x+1$

$\underbrace{(x^2+5x-7)}_{A} \div \underbrace{(x-1)}_{B} = \underbrace{(x+6)}_{Q} \cdots \underbrace{-1}_{R}$

$$\begin{array}{r@{\,}l} & \quad x+6 \\ x-1 \,\big) & x^2+5x-7 \\ & x^2-x \\ \hline & \quad\;\; 6x-7 \\ & \quad\;\; 6x-6 \\ \hline & \qquad\; -1 \end{array}$$

주의! ← 나머지의 차수가 B의 차수보다 작아야 한다.

Chap 01

다항식의 연산 법칙

다항식 A, B, C에 대해 다음이 성립한다.

덧셈에 대한 교환법칙 : $A+B = B+A$

곱셈에 대한 교환법칙 : $AB = BA$

덧셈에 대한 결합법칙 : $(A+B)+C = A+(B+C)$

곱셈에 대한 결합법칙 : $(AB)C = A(BC)$

분배법칙 : $A(B+C) = AB+AC$, $(A+B)C = AC+BC$

곱셈 공식과 인수분해

전개

곱해져 있는 식의 괄호를 풀어 나타내는 것

$$(2x+1)(x+3) \rightleftarrows 2x^2+7x+3$$

전개식

인수분해

하나의 다항식을 그 다항식보다 차수가 낮은 두 개 이상의 다항식의 곱으로 나타내는 것

$$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & 1 & \to & 1 \\ 1 & & 3 & \to & 6 \end{array} \Big) \; 7$$

☆ 필수 암기!

$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b^2$
$(a+b)(a-b)$	a^2-b^2
$(x+a)(x+b)$	$x^2+(a+b)x+ab$
$(ax+b)(cx+d)$	$acx^2+(ad+bc)x+bd$
$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^3$	$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$(a+b)(a^2-ab+b^2)$	a^3+b^3
$(a-b)(a^2+ab+b^2)$	a^3-b^3
$(a+b+c)^2$	$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$
$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$	$a^3+b^3+c^3-3abc$

곱셈 공식, 인수분해 변형

☆ 암기 권장

$(a+b)^2-2ab=(a-b)^2+2ab$	a^2+b^2
$(a+b)^2$	$(a-b)^2+4ab$
$(a-b)^2$	$(a+b)^2-4ab$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2$	$x^2+\frac{1}{x^2}$
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2$	$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+4$
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2$	$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-4$
$(a+b)^3-3ab(a+b)$	a^3+b^3
$(a-b)^3+3ab(a-b)$	a^3-b^3
$\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$	$x^3+\frac{1}{x^3}$
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\frac{1}{x}\right)$	$x^3-\frac{1}{x^3}$
$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$	$a^2+b^2+c^2$
$\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$	$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

곱셈 공식과 인수분해 공식을 가지고 직접 변형 공식을 만들어 보는 것이 중요하다.

Theme 02

항등식과 나머지정리

항등식 : 등식의 문자에 어떤 값을 대입하여도 항상 성립하는 등식

x 값에 관계없이
모든 x에 대하여
임의의 x에 대하여
어떤 x값에 대하여도

모든 x에 대하여

$ax+b=0$	$\Leftrightarrow$	$a=b=0$
$ax+b=cx+d$	$\Leftrightarrow$	$a=c,\ b=d$
$ax^2+bx+c=0$	$\Leftrightarrow$	$a=b=c=0$
$ax^2+bx+c=dx^2+ex+f$	$\Leftrightarrow$	$a=d,\ b=e,\ c=f$

☆ 결론

$p(x)$와 $q(x)$가 n차 다항식일 때 등식 $p(x)=q(x)$가 x에 대한 항등식이면 $p(x)$와 $q(x)$의 동류항의 계수가 서로 같다.

미정계수법 : 항등식의 성질을 이용하여 주어진 등식에서 미지의 계수를 정하는 방법

계수비교법 : 항등식의 양변의 동류항의 계수는 같음을 이용

수치대입법 : 항등식의 문자에 어떤 수를 대입해도 그 값은 같음을 이용

(ex) $x^2-2x-3=ax(x-1)+b(x-1)+c$가 x에 대한 항등식일 때, a, b, c의 값을 구하시오.

계수비교법

$x^2-2x-3=ax^2-ax+bx-b+c=ax^2+(b-a)x+(c-b)$

$\Rightarrow\ a=1,\ b-a=-2,\ c-b=-3$

$\therefore a=1,\ b=-1,\ c=-4$

수치대입법

$x=1$ 대입 : $-4=c$

$x=0$ 대입 : $-3=-b+c \Rightarrow b=-1$

$x=-1$ 대입 : $0=2a-2b+c \Rightarrow a=1$

$\therefore a=1,\ b=-1,\ c=-4$

☆☆☆ 나머지정리

다항식 $f(x)$를 일차식 $x-\alpha$로 나누었을 때 나머지를 R라 하면 $\boxed{R = f(\alpha)}$

다항식 $f(x)$를 일차식 $ax+b$로 나누었을 때 나머지를 R라 하면 $\boxed{R = f\left(-\frac{b}{a}\right)}$

$f(x) = (x-\alpha)Q(x)+R \quad \Rightarrow \quad f(\alpha) = 0 \times Q(\alpha)+R \quad \Rightarrow \quad R = f(\alpha)$

$f(x) = (ax+b)Q(x)+R \quad \Rightarrow \quad f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0 \times Q\left(-\frac{b}{a}\right)+R \quad \Rightarrow \quad R = f\left(-\frac{b}{a}\right)$

☆☆☆ 인수정리

$f(x)$가 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어진다. $\Leftrightarrow$ $f(\alpha) = 0$

나머지정리에서 $R = 0$인 경우

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나누었을 때 나머지가 0이다.

$x-\alpha$가 $f(x)$의 인수이다.

$f(x) = (x-\alpha)Q(x)$ (단, $Q(x)$는 다항식)

조립제법

$f(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$을 $x-\alpha$로 나눈 몫과 나머지를 간단하게 계산하는 방법

$$\begin{array}{c|ccccc}
\alpha & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
 & & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\
\hline
 & a_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\
 & \shortparallel & & & & \\
 & c_0 & & & &
\end{array}$$

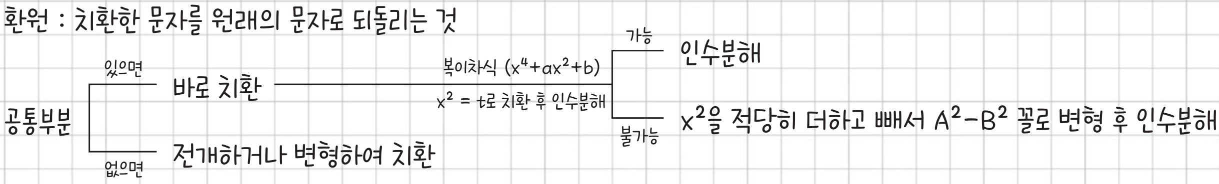
몫 : $c_0x^n+c_1x^{n-1}+c_2x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$ 나머지 : c_n

복잡한 식의 인수분해

1. 치환

치환 : 어떤 항 또는 수식을 하나의 문자로 바꾸는 일

환원 : 치환한 문자를 원래의 문자로 되돌리는 것



2. 인수정리

① 삼차 이상 다항식 $f(x)$에서 $f(\alpha)=0$인 α를 찾는다.

② 조립제법을 이용하여 $(x-\alpha)Q(x)$ 꼴로 인수분해한다.

③ $Q(x)$가 인수분해 가능한 다항식이라면 ①, ②를 반복한다.

$f(\alpha)=0$을 만족하는 α를 찾는 방법

$$\alpha = \pm\frac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$$

3. 문자가 여러 개인 식

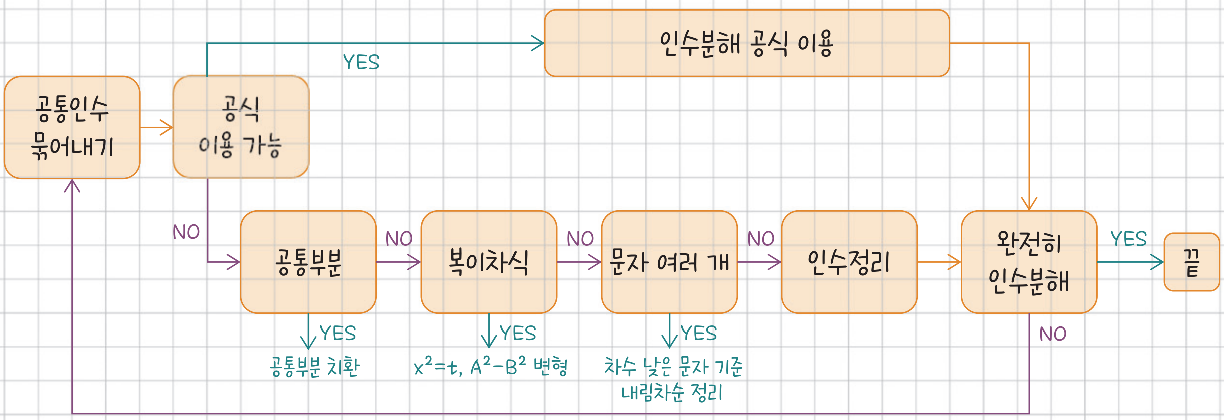
① 차수가 낮은 한 문자에 대하여 내림차순으로 정리한다. 이때, 기준으로 잡은 문자를 제외한 문자는 상수로 생각한다.

② 상수항을 인수분해한 뒤 전체 식을 인수분해한다.

4. 계수가 대칭인 사차 이상의 식

① 가운데 차수인 항으로 묶는다.

② $x\pm\frac{1}{x}$를 이용해 식을 변형하여 인수분해한다.



① $xy+x-y-1$

$= x(y+1)-(y+1)$

$= (y+1)(x-1)$

② $(5x-2)^2-6(5x-2)(x+1)+9(x+1)^2$

$= A^2-6AB+9B^2$

$= (A-3B)^2$

$= \{(5x-2)-3(x+1)\}^2$

$= (2x-5)^2$

③ $(x-1)x(x+2)(x+3)-10$

$= \{x(x+2)\}\{(x-1)(x+3)\}-10$

$= (x^2+2x)(x^2+2x-3)-10$

$= t(t-3)-10$

$= t^2-3t-10$

$= (t-5)(t+2)$

$= (x^2+2x-5)(x^2+2x+2)$

④ x^4-4x^2+3

$= t^2-4t+3$

$= (t-1)(t-3)$

$= (x^2-1)(x^2-3)$

$= (x-1)(x+1)(x^2-3)$

⑤ x^4-7x^2+9

$= x^4-6x^2+9-x^2$

$= (x^2-3)^2-x^2$

$= (x^2-x-3)(x^2+x-3)$

⑥ x^3-7x+6

$x = 1$ 대입하면 $x^3-7x+6 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$= (x-1)(x^2+x-6)$

$= (x-1)(x+3)(x-2)$

⑦ $x^2+2xy+2x-2y-3$

$= (2x-2)y+x^2+2x-3$

$= 2y(x-1)+(x-1)(x+3)$

$= (x-1)(x+2y+3)$

⑧ $x^2-3xy+2y^2+4x-5y+3$

$= x^2+(-3y+4)x+(2y^2-5y+3)$

$$\begin{array}{lr} x & -(2y-3) \\ x & -(y-1) \end{array}$$

$= (x-2y+3)(x-y+1)$

⑨ $x^4+8x^3+14x^2+8x+1$

$= x^2\left(x^2+8x+14+\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)$

$= x^2\left\{x^2+\dfrac{1}{x^2}+8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+14\right\}$

$= x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+8\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+12\right\}$

$= x^2(t^2+8t+12)$

$= x^2(t+2)(t+6)$

$= x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+2\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+6\right)$

$= (x^2+2x+1)(x^2+6x+1)$

$= (x+1)^2(x^2+6x+1)$

백그라운드
고등수학
필기노트

Chap 2

방정식과 부등식

Theme 03

실수와 복소수

실수 체계

- 실수 $\mathbb{R}$ — 실제로 존재하는 수, 수직선에 나타낼 수 있는 수
  - 유리수 $\mathbb{Q}$ — 분수로 나타낼 수 있는 수, $\frac{n}{m}$ 꼴 (m, n은 정수, $m \neq 0$)
    - 정수 $\mathbb{Z}$ — 분모 = 1
      - 자연수 $\mathbb{N}$: $1, 2, 3, \cdots$
      - 0
      - 음의 정수 : $-1, -2, -3, \cdots$
    - 정수가 아닌 유리수 — 일반적인 분수, 소수
      - 유한소수 : 0.71
      - 순환소수 : $0.464646\cdots$
  - 무리수 $\mathbb{Q}^c$ — 순환하지 않는 무한소수
    - 대수적 무리수 : $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \cdots$
    - 초월적 무리수 : $\pi, e, \cdots$

수의 연산 법칙

임의의 실수 a, b, c에 대하여

교환법칙 : $a+b = b+a$, $ab = ba$

결합법칙 : $(a+b)+c = a+(b+c)$, $a(bc)=(ab)c$

분배법칙 : $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$

실수에서의 항등원과 역원

항등원과 역원의 정의는 집합 단원에서 다룬다.

덧셈에 대한 항등원 0

$a+0 = 0+a = a$

임의의 실수 a의 덧셈에 대한 역원 $-a$

$a+(-a) = (-a)+a = 0$

곱셈에 대한 항등원 1

$a\times1 = 1\times a = a$

0이 아닌 임의의 실수 a의 곱셈에 대한 역원 $\frac{1}{a}$

$a\times\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\times a = 1$

Chap 02

실수의 대소 관계 성질

임의의 실수 a, b, c, m에 대하여

$\begin{cases} a > 0 \\ a = 0 \\ a < 0 \end{cases}$ 중 하나를 만족

$\begin{cases} a > b \Leftrightarrow a-b > 0 \\ a = b \Leftrightarrow a-b = 0 \\ a < b \Leftrightarrow a-b < 0 \end{cases}$

$a > 0,\ b > 0$

$\Rightarrow a+b > 0,\ ab > 0$

$a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$

$a > b \Rightarrow a \pm m > b \pm m$

$a > b \begin{cases} m > 0 \Rightarrow am > bm,\ \dfrac{a}{m} > \dfrac{b}{m} \\ m < 0 \Rightarrow am < bm,\ \dfrac{a}{m} < \dfrac{b}{m} \end{cases}$

제곱근

a의 제곱근 : a가 양수일 때 제곱하여 a가 되는 실수 $\Rightarrow$ $x^2 = a$를 만족하는 $x = \pm\sqrt{a}$

제곱근 a : $\sqrt{a}$

$a \geq 0,\ b \geq 0$일 때

$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

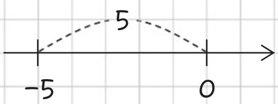
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}\ (b \neq 0)$

$\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

절댓값

: 수직선에서 어떤 수를 나타내는 점과 원점 사이의 거리

$|-5| = 5$



$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

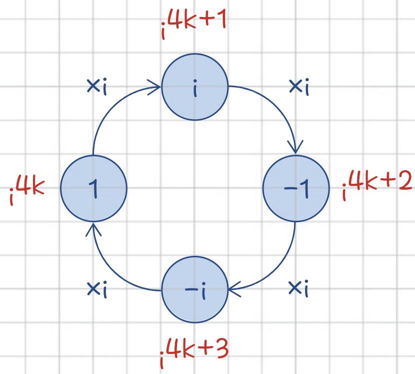
$|a| \geq 0,\ |a| = |-a|,\ |a|^2 = |a^2|$

$|a||b| = |ab|,\ \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}\ (b \neq 0)$

$|a|+|b| = 0 \Leftrightarrow a^2+b^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$이고 $b = 0$

복소수

허수단위 i : 제곱하여 −1이 되는 수 중 하나 $i^2 = -1,\ i = \sqrt{-1}$



$$z = \overset{\text{실수부분}}{a} + \overset{\text{허수부분}}{b}\,i$$

(a, b는 실수)

- $b \neq 0$: 허수
- $b = 0$: 실수
- $a = 0,\ b \neq 0$: 순허수

복소수의 상등 : 실수 a, b, c, d에 대하여 $\boxed{a+bi = c+di \Leftrightarrow a = c,\ b = d}$

실수부분끼리 같고, 허수부분끼리 같다.

☆ 켤레복소수

$z = a+bi$에 대하여 $\boxed{\bar{z} = a-bi}$

성질 $\bar{\bar{z_1}} = z_1$ $\quad \overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z_1} \pm \bar{z_2}$ (복부호동순) $\quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z_1}\,\bar{z_2}$ $\quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

실수성 $\quad z_1\bar{z_1},\ z_1+\bar{z_1}$는 항상 실수이다.

⇒ 복소수와 켤레복소수의 합과 곱은 항상 실수

$\bar{z} = z$이면 z는 실수

$\bar{z} = -z$이면 z는 순허수 또는 0

$z^2 < 0$이면 z는 순허수

복소수의 사칙연산

$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$

$(a+bi)-(c+di) = (a-c)+(b-d)i$

$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$ … 분모의 실수화

분모의 켤레복소수를 곱한다.

주의! 음수의 제곱근

$a > 0$일 때 $\sqrt{-a} = ai$, $-a$의 제곱근은 $\pm\sqrt{a}i$

$a < 0,\ b < 0$일 때 $\sqrt{a}\sqrt{b} = -\sqrt{ab}$

$a > 0,\ b < 0$일 때 $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$

Chap 02

Theme 04

방정식

방정식

방정식 : 미지수의 값에 따라 참일 수도 있고 거짓일 수도 있는 등식

참이 되게 하는 미지수의 값을 해 또는 근이라 한다.

해를 구하는 것을 방정식을 푼다고 한다.

다항방정식의 풀이

다항식 $P(x)$에 대하여 $P(x)=0$, 차수에 따라 일차방정식, 이차방정식, …

일차방정식

$ax=b$

- $a=0$
  - $b=0$: 해는 무수히 많다. (부정)
  - $b\neq 0$: 해는 없다. (불능)
- $a\neq 0$: $x=\frac{b}{a}$ (하나의 근)

이차방정식

$ax^2+bx+c=0$
$(a\neq 0)$

- 인수분해 : $(px-q)(rx-s)=0$ $(pr\neq 0)$의 근은 $x=\frac{q}{p}$ 또는 $x=\frac{s}{r}$
- ☆☆☆ 근의 공식 : $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$a(x-m)^2=n \Rightarrow x=m\pm\sqrt{\frac{n}{a}}$

근의 공식 증명

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

x의 계수 절반의 제곱
좌변을 완전제곱으로 변형

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

☆☆☆ 이차방정식의 근의 판별

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

b^2-4ac = 판별식(D)

- $D > 0$: 서로 다른 두 실근
- $D = 0$: 서로 같은 두 실근 (중근)
- $D < 0$: 서로 다른 두 허근

이차방정식이 실근을 가질 조건 $D \geq 0$

☆☆☆ 이차방정식의 근과 계수와의 관계

$ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

분모는 a로 고정

분자는 근의 개수 따라 b, c, d ⋯

부호는 (−), (+) 번갈아서

$a(x-\alpha)(x-\beta) = a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} = ax^2-a(\alpha+\beta)x+a\alpha\beta = ax^2+bx+c$ ⇒ 계수비교법 적용

α, β가 근이고 계수가 1인 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta) = x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta = 0$

이차방정식의 켤레근

a, b, c가 유리수일 때 이차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$ (단, p, q는 유리수)

a, b, c가 실수일 때 이차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$ (단, p, q는 실수)

이차방정식 실근의 부호

두 근 모두 양수 $\underbrace{D \geq 0}_{\text{실근}}$, $\underbrace{\alpha+\beta > 0}_{\text{양수의 합은 양}}$, $\underbrace{\alpha\beta > 0}_{\text{양수의 곱은 양}}$

두 근 모두 음수 $\underbrace{D \geq 0}_{\text{실근}}$, $\underbrace{\alpha+\beta < 0}_{\text{음수의 합은 음}}$, $\underbrace{\alpha\beta > 0}_{\text{음수의 곱은 양}}$

두 근 서로 다른 부호 $\underbrace{\alpha\beta < 0}_{\text{양×음 = 음}}$

$\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0$

$\frac{c}{a} \times a^2 = ac < 0$

$-4ac > 0$

$D = b^2-4ac > b^2 \geq 0$

D는 항상 0보다 같거나 크므로 판단 필요 X

이차함수의 그래프

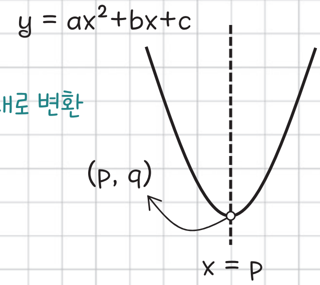
일반형 : $y = ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수, $a \neq 0$)

표준형 : $y = a(x-p)^2+q$ (a, p, q는 상수, $a \neq 0$)

근의 공식 증명에서 활용한 완전제곱 변형을 이용해 자유자재로 변환

$$\left(p = -\frac{b}{2a},\ q = -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$$

꼭짓점의 좌표 : (p, q)　　　축의 방정식 : $x = p$



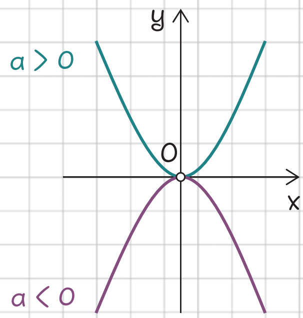
$y = ax^2$

① 원점 O(0, 0)을 지남

② y축에 대칭

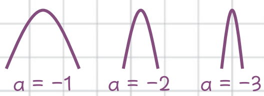
③ $x < 0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은
- $a > 0$일 때 감소
- $a < 0$일 때 증가

　$x > 0$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은
- $a > 0$일 때 증가
- $a < 0$일 때 감소



④ a가 양수이면 아래로 볼록, a가 음수이면 위로 볼록인 곡선

⑤ $|a|$ 증가하면 그래프의 폭 좁아짐



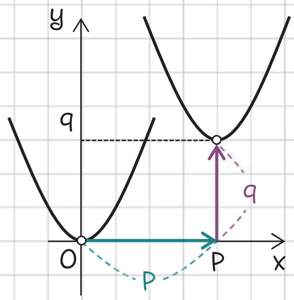
$y = a(x-p)^2+q$

① 이차함수 $y = ax^2$의 그래프를 x축 방향으로 p만큼, y축 방향으로 q만큼 평행이동한 것

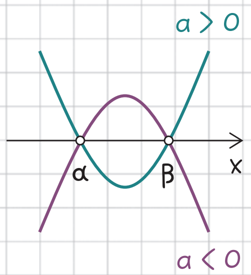
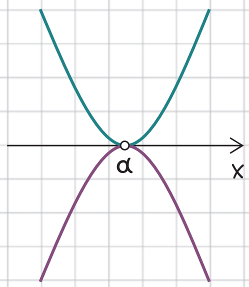
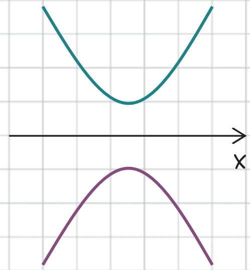
② 꼭짓점의 좌표 : (p, q)

③ 축의 방정식 : $x = p$　$p = -\frac{b}{2a}$
- a와 b가 같은 부호 ⇒ 대칭축 y축 왼쪽
- a와 b가 다른 부호 ⇒ 대칭축 y축 오른쪽

④ y축과의 교점의 좌표 : $(0, ap^2+q)$

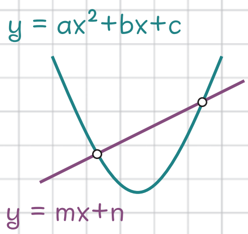
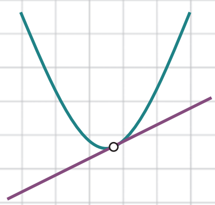


☆☆☆ 이차함수 그래프와 이차방정식의 관계

$ax^2+bx+c=0$의 판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차방정식의 근	서로 다른 두 실근	중근	서로 다른 두 허근
x축과의 교점	서로 다른 두 점	한 점	없음
$y=ax^2+bx+c$의 그래프			

이차함수 그래프와 직선의 위치 관계

$ax^2+(b-m)x+(c-n)=0$으로 변형하여 위처럼 생각

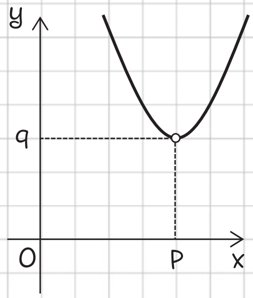
$ax^2+bx+c=mx+n$의 판별식	$D>0$	$D=0$	$D<0$
이차방정식의 근	서로 다른 두 실근	중근	서로 다른 두 허근
교점의 개수	2개	1개	0개
이차함수 그래프와 직선 그래프			

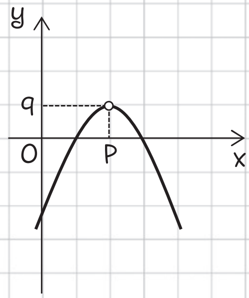
이차함수의 최대와 최소 … $y = a(x-p)^2+q$

실수 전체의 범위

$a > 0$이면 $x = p$에서 최솟값 q를 갖고 최댓값은 없다.

$a < 0$이면 $x = p$에서 최댓값 q를 갖고 최솟값은 없다.

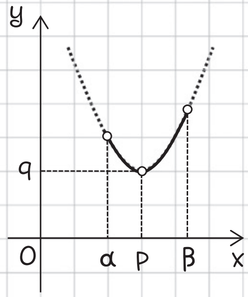


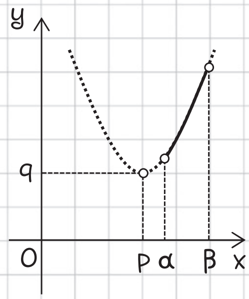


$\alpha \le x \le \beta$

$x = \alpha$, $x = \beta$, $x = p$일 때 최댓값이나 최솟값을 가진다.

주의! 하지만 p가 $\alpha \le x \le \beta$에 포함되지 않는다면 $x = p$인 경우를 제외하고 최댓값과 최솟값을 구한다.





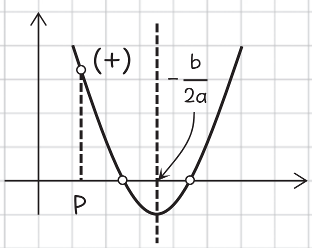
이차방정식의 근의 분리

① $y = ax^2+bx+c$의 그래프를 조건에 알맞게 그린다.

② 경계에서의 y의 부호, 축의 위치, 판별식을 따진다.

$ax^2+bx+c = 0$에서

(1) 두 근이 모두 p보다 클 때



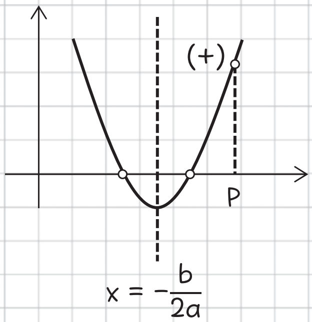
$f(x) = ax^2+bx+c$라 하면

$f(p) > 0$

$-\frac{b}{2a} > p$

$D \ge 0$

(2) 두 근이 모두 p보다 작을 때



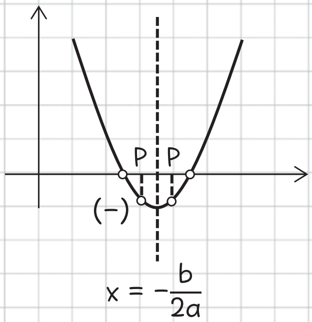
$f(x) = ax^2+bx+c$라 하면

$f(p) > 0$

$-\frac{b}{2a} < p$

$D \geq 0$

(3) p가 두 근 사이에 있을 때



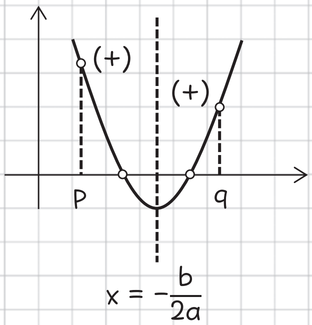
$f(x) = ax^2+bx+c$라 하면

$f(p) < 0$

$-\frac{b}{2a}$? p $\Rightarrow$ 판단 불가

$D \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(p) < 0$이면 항상 $D > 0$이므로 판단 필요 X

(4) 두 근이 p와 q 사이에 있을 때



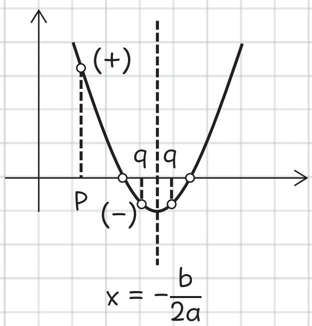
$f(x) = ax^2+bx+c$라 하면

$f(p) > 0$, $f(q) > 0$

$p < -\frac{b}{2a} < q$

$D \geq 0$

(5) 두 근 중 작은 근이 p, q 사이에 있을 때



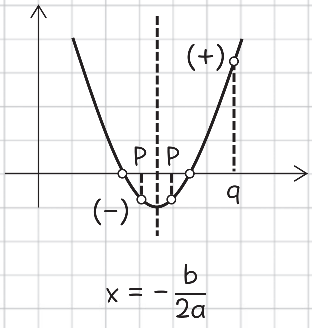
$f(x) = ax^2+bx+c$라 하면

$f(p) > 0$, $f(q) < 0$

$-\frac{b}{2a} > p$, $-\frac{b}{2a}$? q $\Rightarrow$ q에 대해서는 판단 불가

$D \geq 0$ $\Rightarrow$ $f(q) < 0$이면 항상 $D > 0$이므로 판단 필요 X

(6) 두 근 중 큰 근이 p, q 사이에 있을 때



$f(x) = ax^2+bx+c$라 하면

$f(p) < 0$, $f(q) > 0$

$-\frac{b}{2a} < q \Rightarrow$ p에 대해서는 판단 불가

$D \geq 0 \Rightarrow f(p) < 0$이면 항상 $D > 0$이므로 판단 필요 X

고차방정식의 풀이

$f(x) = 0$에서 $f(x)$가 삼차 이상의 다항식인 경우 복잡한 식의 인수분해 방식을 이용해 $f(x)$를 인수분해한다.

$f(x) = AB$ $A = 0$ 또는 $B = 0$

$f(x) = ABC$ $A = 0$ 또는 $B = 0$ 또는 $C = 0$

$f(x) = ABCD$ $A = 0$ 또는 $B = 0$ 또는 $C = 0$ 또는 $D = 0$

삼차방정식의 근과 계수와의 관계

$ax^3+bx^2+cx+d = 0$의 세 근을 α, β, γ라 하면 $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = \frac{c}{a}$, $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$

α, β, γ가 근이고 계수가 1인 이차방정식은 $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma = 0$

삼차방정식의 켤레근

a, b, c, d가 유리수일 때 삼차방정식의 한 근이 $p+q\sqrt{m}$이면 다른 한 근은 $p-q\sqrt{m}$ (단, p, q는 유리수)

a, b, c, d가 실수일 때 삼차방정식의 한 근이 $p+qi$이면 다른 한 근은 $p-qi$ (단, p, q는 실수)

Chap 02

$x^3 = \pm 1$의 허근 ω

$x^3 = 1$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x = 1, \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

① $\omega^3 = 1$ ② $\omega^2+\omega+1 = 0$ ③ $\omega+\overline{\omega} = -1$ ④ $\omega\overline{\omega} = 1$ ⑤ $\omega^2 = \overline{\omega} = \frac{1}{\omega}$

$x^3 = -1$

$(x+1)(x^2-x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

① $\omega^3 = -1$ ② $\omega^2-\omega+1 = 0$ ③ $\omega+\overline{\omega} = 1$ ④ $\omega\overline{\omega} = 1$ ⑤ $\omega^2 = -\overline{\omega} = -\frac{1}{\omega}$

미지수가 두 개인 연립방정식

: 두 개 이상의 방정식을 묶어놓은 것

연립일차방정식

가감법 : 두 식을 더하거나 빼서 미지수를 소거하는 방법

대입법 : 한 식을 한 문자에 대하여 푼 뒤 다른 식에 대입하여 푸는 방법

⇒ 문자를 소거

연립이차방정식

① $\begin{cases} (\text{일차식}) = 0 \\ (\text{이차식}) = 0 \end{cases}$

일차식을 한 문자에 대하여 푼 뒤 이차식에 대입

② $\begin{cases} (\text{이차식}) = 0 \\ (\text{이차식}) = k \end{cases}$ (k는 상수)

(이차식) = 0을 인수분해하여 (일차식 1) = 0, (일차식 2) = 0으로 나눈 뒤에

$\begin{cases} (\text{일차식 } 1) = 0 \\ (\text{이차식}) = k \end{cases}$, $\begin{cases} (\text{일차식 } 2) = 0 \\ (\text{이차식}) = k \end{cases}$ 와 같이 ① 형태의 연립방정식을 2개 만든 후 ①의 방법을 이용

③ $\begin{cases} (\text{이차식}) = k_1 & (k_1\text{은 상수}) \\ (\text{이차식}) = k_2 & (k_2\text{는 상수}) \end{cases}$

두 이차방정식의 양변에 적절한 수를 곱하여 더하거나 빼어 ②의 형태를 만들어 ②의 방법을 이용

대칭식 : $f(x, y) = f(y, x)$를 만족하는 f

① $x+y = p$, $xy = q$로 치환

② 연립이차방정식의 풀이를 이용해 p, q의 값을 구한다.

③ $t^2-pt+q = 0$의 두 근이 x, y임을 이용 $\Rightarrow$ $(t-x)(t-y) = 0$ $\Rightarrow$ $t = x$, $t = y$

(ex)

$$\begin{cases} x+y-xy = 1 \\ 2x+2y-3xy = -2 \end{cases}$$: x와 y의 자리를 바꾸어도 식이 똑같으므로 대칭식

$x+y = p$, $xy = q$로 놓으면 $\begin{cases} p-q = 1 \\ 2p-3q = -2 \end{cases}$

연립하면 $p = 5$, $q = 4$

$x+y = 5$, $xy = 4$ $\Rightarrow$ $t^2-5t+4 = 0$의 두 근이 x, y $\Rightarrow$ $(t-1)(t-4) = 0$

$$\therefore \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}, \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$$

공통근 : 두 개 이상의 방정식을 동시에 만족하는 미지수의 값

① $f(x) = 0$, $g(x) = 0$의 해 중 공통인 값을 찾는다.

② 공통해를 p라 두고 연립방정식을 풀어 찾는다. $\Rightarrow$ $f(p)$와 $g(p)$를 변형

Chap **02**