2023 대학수학능력시험
수학영역 시험대비

One of the basic rules of the universe is that nothing is perfect. Perfection simply doesn't exist. Without imperfection, neither you nor I would exist.

To confine our attention to terrestrial matters would be to limit the human spirit.

We are just an advanced breed of monkeys on a minor planet of a very average star. But we can understand the Universe. That makes us something very special

미적분

우주설 N제

WOO JUSEOL

저자소개

정재민 (우주설)
분당 알티스 수능학원 공동원장
신촌 알티스 수학학원 공동원장
입시커뮤니티 포만한/오르비 인플루언서
시대인재 R&D센터 네이버 카페 '로물콘'수학 스탭
우주설 모의평가 / 우주설 N제 저자
대형학원 컨텐츠 공급 및 대치단과 개설제의

누구나 만점을 받을 수 있는 출제기조입니다.

좁은 출제범위로 인해 지엽적인 내용이 출제되고

기적 같은 성적상승 사례도 빈번하게 나타납니다.

위기와 기회가 공존하고 있는 혼란스러운 입시이지만

늘 그래왔듯이 우리는 방법을 알 고 있습니다.

많이 틀려보고 많이 고민하고 많이 고쳐봐야 합니다.

한 주제더라도 여러 접근법을 알고 있어야 합니다.

특정 주제를 편식하지 않고 모두 분석해야 합니다.

결론을 암기하지 않고 유도할 줄 알아야 합니다.

현재의 치열한 괴로움이 여러분의 가치를 증명합니다.

이제 준비는 끝났습니다.

절대 타협하지 마십시오. 목표는 만점입니다.

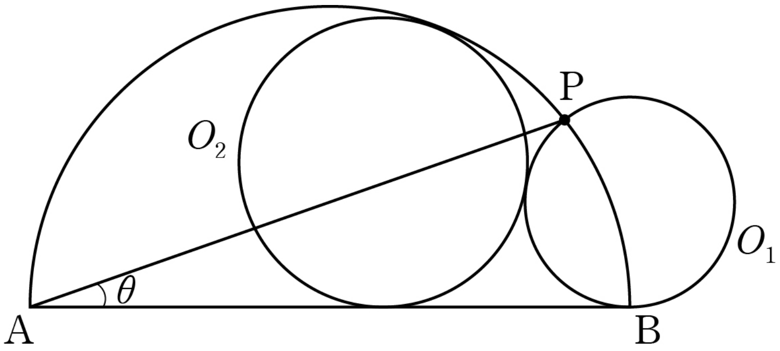
수학강사 우주설 드림

문의

E-mail: ass1739@naver.com
H.P. : 010-4800-1224

39 Killer

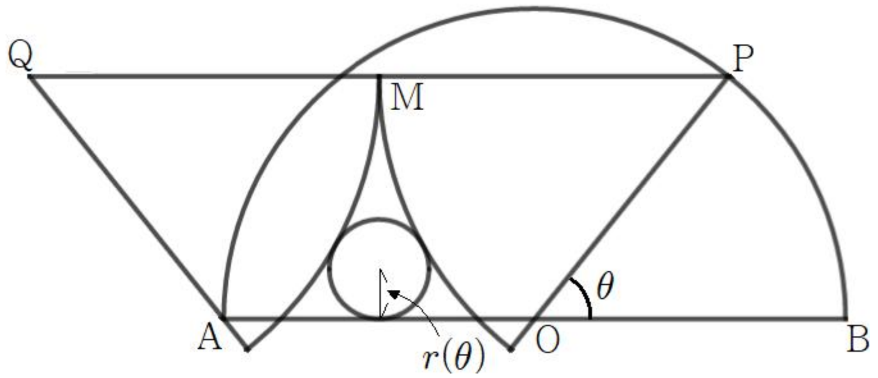
그림과 같이 길이가 2인 선분 AB을 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB 위에 점 P에 대하여 점 B에서 직선 AB와 접하고 점 P를 지나는 원 O_1과 원 O_1에 외접하고 호 AP, 직선 AB, 동시에 접하는 원 O_2가 있다.
$\angle \mathrm{PAB} = \theta$일 때, O_1의 반지름을 $f(\theta)$ O_2의 반지름을 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)}$의 값은?



① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

47

길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 중심 O에 대하여 $\angle \mathrm{POB}=\theta$가 되도록 호 AB위에 점 P를 잡고, 사각형 AOPQ가 선분 AO와 선분 PQ가 평행인 등변사다리꼴이 되도록 반원 밖에 점 Q를 잡는다. 선분 PQ의 중점 M에 대하여 점 P, Q를 각각 중심으로 하고 점 M을 지나는 두 부채꼴과 선분 AB에 동시에 접하는 원의 반지름을 $r(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+}\frac{r(\theta)}{\theta^2}=k$이다. $60k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{3}$)



03

우주설미적분 N제

미분법

Part3
미분법

62 Killer

$0 < t < \frac{\pi}{2}$인 상수 t에 대하여 연속함수 $y=f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} e^x(\sin x+\cos x) & (x \le t) \\ e^x(\sin x-\cos x)+a & (x > t) \end{cases}$$

이다. $\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h+|h|)-f(t-4h)}{h}=b$일 때, $\frac{b}{a}$의 값은?

① 8　② $\frac{17}{2}$　③ 9　④ $\frac{19}{2}$　⑤ 10

63 Killer

$x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\sin\left(\pi\sqrt{x}\right)\right|$$

에 대하여 $f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능한, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ (n은 자연수)라 할 때, 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

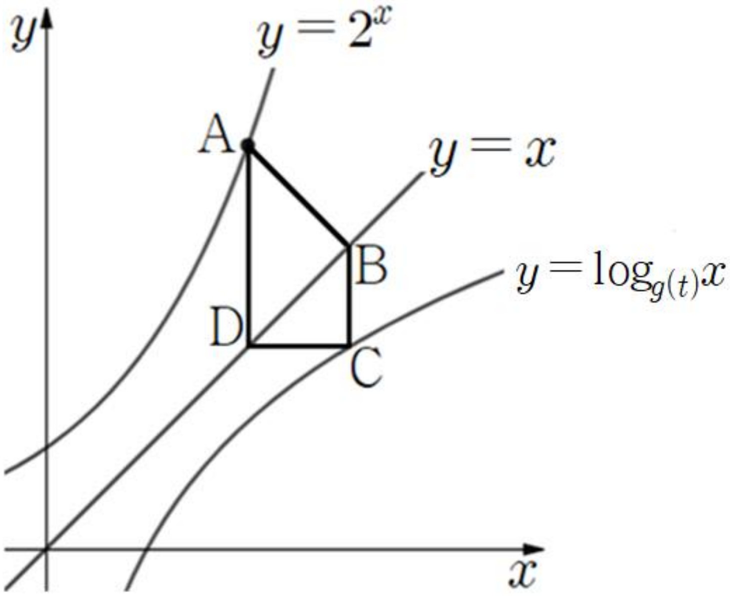
$$a_n=\lim_{h\to 0-}\frac{f\left(\alpha_{n+2}+h^n\right)-f\left(\alpha_n-h^n\right)}{h^n}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 값은?

① $\frac{\pi}{6}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{3}$ ④ $\frac{5\pi}{12}$ ⑤ $\frac{\pi}{2}$

64

그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(\mathrm{t}, 2^{\mathrm{t}})$에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 B라하고, 점 B를 지나며 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_{g(t)}x$와 만나는 점을 C, 점 C를 지나며 y축과 수직인 직선이 직선 $y=x$와 만나는 점을 D라 할 때, 사각형 ABCD는 사다리꼴을 이룬다. $4\sqrt{3}\times g'(2)$의 값은?



① $1+3\ln2-4\ln3$ ② $1+3\ln2-3\ln3$ ③ $1+3\ln2-2\ln3$ ④ $1+4\ln2-3\ln3$ ⑤ $1+4\ln2-2\ln3$

65

$x>0$에서 정의된 함수

$$f(x)=\left|\frac{kx}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2k}x\right)\right| \quad (\text{단, } k\text{는 양의 상수})$$

에 대하여 함수 $y=f(x)$가 $x=\alpha$에서 미분 불가능한, 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ (n은 자연수)라 할 때, 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_2=6$

(나) 자연수 m에 대하여 $\sum_{n=1}^{m}\left(\lim_{h\to 0-}\frac{f(\alpha_n+h^n)-f(\alpha_n)}{h^n}\right)=16$

$k+m$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18 ④ 19 ⑤ 20

Part3
미분법

66

열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x) = e^{2x}\cos x$는 $x = \alpha$에서 극댓값을 갖고, $x = \beta$에서 극솟값을 갖는다. $\cos(\alpha + \beta)$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

126 Idea

함수 $f(x)=x^2e^x$에 대하여 $x \geq 0$에서 정의된 함수

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-tx|\,dt$$

는 $x=a$에서 극값을 갖는다. $a=k\times e^k$일 때, $16k^2$의 값을 구하시오.

Part04

적분법

127 Idea Killer

열린구간 $(-1, 1)$에서 정의된 함수 $f(x)=\int_0^{3\pi} t\times|\cos t-x|\,dt$는 $x=\alpha$에서 극값을 갖는다.

$0<k<\pi$인 $\cos k=\alpha$를 만족시키는 상수 $k=(-4+\sqrt{a})\pi$일 때, $2a$의 값을 구하시오.

128 Idea Killer

$0<t<\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $\sin x=\sin(x-2t)$의 양의 실근을 크기가 작은 것부터 순서대로 나열한 것을 $x=a_1, a_2, \cdots$ 라 할 때, 함수 $f(t)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(t)=\int_{a_1}^{a_2}\{\sin x-\sin(x-2t)\}dx$$

일 때, $\lim_{t\to p+}f(t)-\lim_{t\to p-}f(t)=q\ \ (q\neq 0)$를 만족시키는 상수 p, q에 대하여 $\frac{10p}{\pi}+q$의 값을 구하시오.

129 Killer

실수 전체집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $f^{-1}(x)$가 직선 $y=-x+t+2$와 만나서 생기는 교점의 x좌표를 각각 $g(t), h(t)$라 하자. 함수 $f(x), g(x)$가 아래의 조건을 만족시킬 때, $\int_1^4 h(x)\,dx$ 의 값을 구하시오.

(가) $\int_1^2 f(x)\,dx=3$
(나) $g(1)=1, g(4)=2$

130 Idea Killer

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 $x=t-1$에서 $x=t$까지의 곡선 $y=f(x)$의 길이 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$는 극솟값 0을 갖는다.
(나) $f'(t)\times g'(t)\geq 0$을 만족시키는 t의 범위는 $t\geq 0$이다.

$f(2)=k$라 할 때, $12k$의 값을 구하시오.

빠른 정답표

1	9	2	14	3	②	4	③	5	35
6	④	7	②	8	①	9	4	10	①
11	③	12	①	13	⑤	14	③	15	②
16	④	17	⑤	18	②	19	③	20	①
21	①	22	⑤	23	②	24	⑤	25	④
26	20	27	④	28	⑤	29	①	30	④
31	④	32	③	33	③	34	③	35	61
36	⑤	37	③	38	10	39	④	40	③
41	③	42	②	43	④	44	④	45	③
46	108	47	20	48	30	49	①	50	④
51	20	52	②	53	①	54	48	55	30
56	2	57	10	58	③	59	①	60	④
61	③	62	①	63	②	64	④	65	③
66	③	67	④	68	②	69	②	70	④
71	8	72	⑤	73	272	74	①	75	7
76	①	77	④	78	4	79	⑤	80	②
81	⑤	82	⑤	83	⑤	84	④	85	⑤
86	111	87	③	88	①	89	③	90	⑤
91	①	92	①	93	④	94	4	95	60
96	⑤	97	③	98	⑤	99	10	100	40
101	28	102	⑤	103	14	104	①	105	③
106	②	107	③	108	④	109	15	110	7
111	④	112	2	113	④	114	②	115	②
116	⑤	117	⑤	118	⑤	119	⑤	120	④
121	80	122	72	123	③	124	18	125	⑤
126	8	127	41	128	13	129	9	130	30

1. 9

$a_1+2a_2+2^2a_3+\cdot\ \cdot\ \cdot\ +2^{n-1}a_n=\frac{15}{2}-5n$에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}a_k=\frac{15}{2}-5n$이고,

$\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}a_k=\left(\frac{15}{2}-5n\right)-\left(\frac{15}{2}-5n+5\right)$이므로

$2^{n-1}a_n=-5\ \ (n\geq 2)$, 이때, $\sum_{k=1}^{n}2^{k-1}a_k=\frac{15}{2}-5n$에 $n=1$을

대입하면, $a_1=\frac{5}{2}$이므로

$a_n=-\frac{5}{2^{n-1}}\ \ (n\geq 2)$, $a_1=\frac{5}{2}$ 를 얻는다.

수열 $a_n\sin\frac{n\pi}{2}$에서 $a_1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5}{2}$는 따로 계산해주고

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{5}{2}+\sum_{n=2}^{\infty}a_n\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n}\sin\frac{2n\pi}{2}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{2n+1}\sin\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n}\times 0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{4}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{5}{2}+0+\frac{\frac{5}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{7}{2}$$

2. 14

$3^{n-1}a_1+3^{n-2}a_2+3^{n-3}a_3+\ \cdots\ +a_n=3^n-2^n$에서

$\sum_{k=1}^{n}7^{n-k}a_k=\left(\frac{2}{3}\right)^n-2$이고, 양변을 7^n으로 나누어

$\sum_{k=1}^{n}7^{-k}a_k=\left(\frac{2}{21}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$를 얻는다.

$$\sum_{k=1}^{n}7^{-k}a_k-\sum_{k=1}^{n-1}7^{-k}a_k=\left\{\left(\frac{2}{21}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n\right\}-\left\{\left(\frac{2}{21}\right)^{n-1}-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}\right\}$$

$$7^{-n}a_n=\left\{\left(\frac{2}{21}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n\right\}-\left\{\left(\frac{2}{21}\right)^{n-1}-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^{n-1}\right\}$$
$(n\geq 2)$,

양변에 7^n을 곱하여

$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n-7\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+12\ \ (n\geq 2)$ 를 얻고,.

$\sum_{k=1}^{n}7^{-k}a_k=\left(\frac{2}{21}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{7}\right)^n$에 $n=1$을 대입하여

$a_1=-\frac{4}{3}$을 얻는다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+p)=q$에서 급수가 수렴하기 위한 조건에 의해

$\lim_{n\to\infty}a_n+p=0$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-7\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+12\right\}=12$ 이므로,
$p=-12$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-12)=(a_1-12)+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-7\times\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

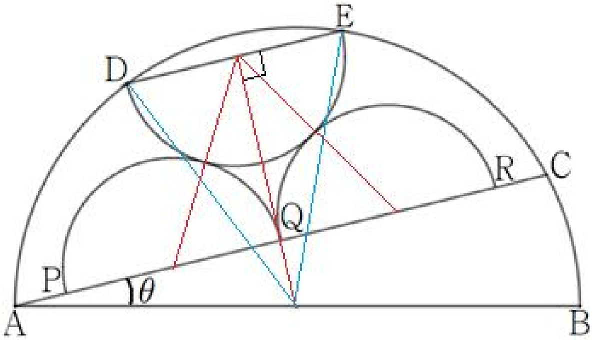
$$=-\frac{40}{3}+\frac{-\frac{38}{9}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$=-26$$

$-12-(-26)=14$

38. 10

〔출제의도〕 피타고라스, 특수각



$$1^2=r^2+(r\sqrt{3}+\sin\theta)^2$$

$$4r^2+2\sqrt{3}\sin\theta\times r+\sin^2\theta-1=0$$

$$r=\frac{-\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{4-\sin^2\theta}}{4}$$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-}\frac{r(\theta)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^2}=\lim_{t\to0+}\frac{-\sqrt{3}\cos t+\sqrt{4-\cos^2 t}}{4(t)^2}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4\sin^2 t}{4(t)^2\left(\sqrt{4-\cos^2 t}+\sqrt{3}\cos t\right)}=\frac{1}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)}$$

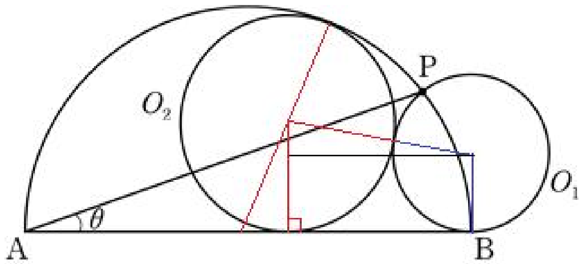
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ ,\quad 120k^2=10$$

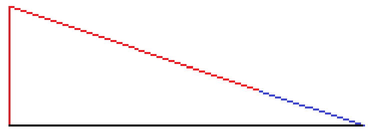
39. ④

〔출제의도〕 극한값의 연산, 피타고라스

f, g를 각각 구하지 않고,

$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$를 구하는 방법이 있다.





빗변의 길이가 $f+g$인 직각삼각형의 각 변의 길이를 구해보자.

밑변의 길이가 반원의 반지름 1에서

$\sqrt{1-2g}$ (피타고라스 $\sqrt{(1-g)^2-g^2}$)를 뺀 것.

높이가 $g-f$이다. 피타고라스를 쓰면,

$$(f+g)^2=\left(1-\sqrt{1-2g}\right)^2+(g-f)^2$$

$4fg=\left(1-\sqrt{1-2g}\right)^2$, 여기서 양변을 f^2으로 나누자.

$$4\frac{g}{f}=\left(\frac{1-\sqrt{1-2g}}{f}\right)^2$$

$$4\frac{g}{f}=\left(\frac{2g}{f\left(1+\sqrt{1-2g}\right)}\right)^2$$

$4\frac{g}{f}=\left(\frac{g}{f}\right)^2\left(\frac{2}{\left(1+\sqrt{1-2g}\right)}\right)^2$ $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$가 수렴하고

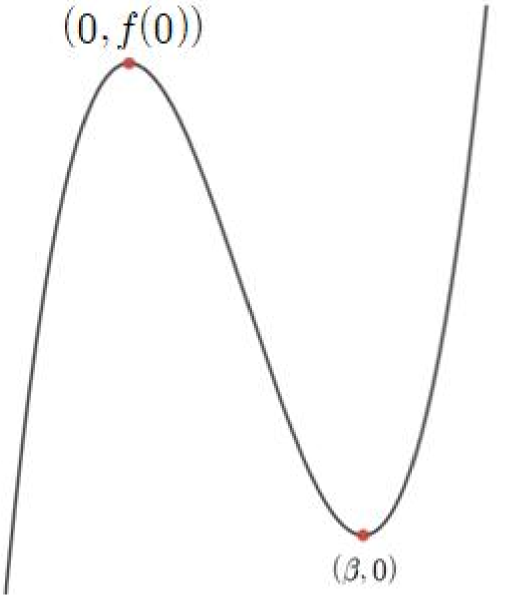
$\lim_{\theta\to0+}g(\theta)=0$이므로 양변에 극한을 취하면,

4답 = 답$^2\times(1)^2$

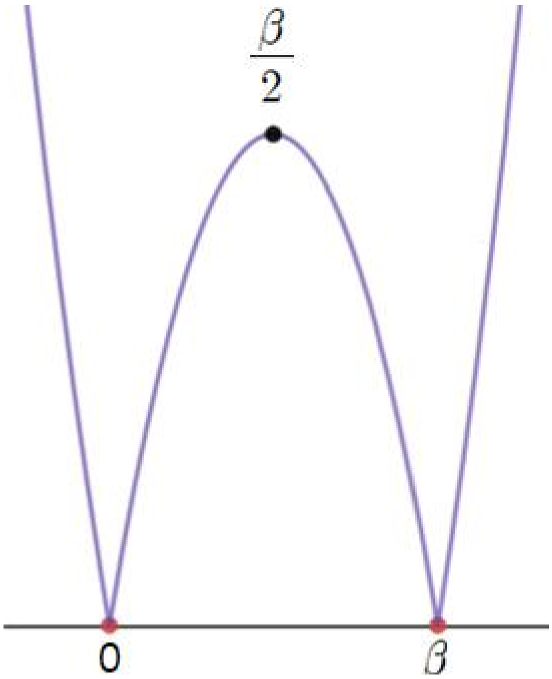
$f'(t) \times g'(t) \geq 0$를 만족시키므로 모순이 발생하며, $t \geq 0$라는 범위 자체가 $t=\alpha$인 상황을 포함해야 하므로 $0 \leq \alpha$임을 알 수 있다.

그런데 $0<\alpha$일 경우
$t=0$에서 $f'(t)>0$이고 $|f'(t)|<|f'(t-1)|$
이므로 $g'(t)<0$이다. 따라서 $\alpha=0$이어야 한다.

여기까지의 상황을 정리하자.



열린구간 $(0, \beta)$에서 t를 움직여보며
$f'(t) \times g'(t) \geq 0$가 항상 성립하는지 알아보자.
$f'(t)<0$이므로 $g'(t) \leq 0$이어야 한다. 그러므로
$|f'(t)| \leq |f'(t-1)|$여야 하는데



여기서 $\beta>1$이라면, 반드시 $t=1$일 때,
$|f'(t)| \leq |f'(t-1)|$이 성립하지 않고 조건을 만족시키지 않는다.

그렇다고 $\beta<1$이라면, $t=\beta+h$에서
(h는 충분히 작은 양수) $f'(t)>0$이므로
$g'(t) \geq 0$여야 한다. 그러나 $|f'(t)|>|f'(t-1)|$를 만족하지 않는 부분이
존재한다.

$\beta=1$이라면, 모든 조건을 만족시킨다.

따라서 $f'(x)=3x(x-1)$에 대하여 $(1, 0)$을 지나므로
$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{5}{2}$
$12f(2)=30$

미적분

우주설 N제

2023 대학수학능력시험

수학영역 시험대비