안녕맨의 끝장인강

도함수의 활용2 – 함수의 증감

⇒ 도함수의 활용 2의 주된 내용은 도함수 $(=f'(x))$의 부호를 가지고 $f(x)$의 증감을 알 수 있다는 거야

우선 함수의 증감에 대해서 좀 알아보자

1. 함수의 증감의 의미와 식의 표현

(1) 함수의 증감 의미

⇒ "증가"의 의미가 뭘까? 단순히 많아지면 증가인가?
예를 들어 용돈이 10만원에서 20만원이 됐다 이건 증가일까?

얼핏 보면 용돈이 올라간 것 처럼 보이니깐 당연히 증가일거 같지

이번에 이글을 다시 봐봐

용돈이 2월달에 10만원에서 1월달에는 20만원이 됐다 이건 어때?

물론 상식적으로 시간의 흐름은 1월에서 2월로 가는게 맞지만
표현이 이상할 뿐 저 말 그대로라면 용돈은 실제로
줄어든거지

이렇게 $\triangle y$ 의 증가만 가지고 어떤 변화가 증가했다 그러면
안되는거야

변화 분석의 도구를 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ 를 쓰기 때문에 $\triangle x$도 고려해야
증가 감소를 정확하게 판단할 수 있는거지

그니깐 위의 말에서 증가로써 제대로 표현하려면

"용돈이 1월달에 10만원이었는데 2월달에 20만원됬다"

이렇게 되면 정확하게 용돈이 증가 했다 말할수 있어

그리고 $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{+10\text{만원}}{+1\text{개월}} > 0$ 이라는 것을 알수있지

여기서 변화량의 부호가 양수일때 증가를 뜻한다는것을
알 수 있지 물론 반대로 음수일때는 감소를 나타내

$\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$ 는 앞서 배웠듯이 평균변화율 (두점사이의 기울기)였는데
이렇듯 기울기의 부호가 함수의 증감을 나타낸다는것도
알 수 있어

참고로 어떤 ≪ 구간에서는 증가, 감소 ≫ 라는표현을 쓰고
≪ 특정한 점에서는 증가상태, 감소상태 ≫ 라는표현을 써

표현의차이일뿐 의미는 동일해

(2) 도함수의 부호를 이용한 함수의 증감

$\Rightarrow$ 평균변화율 $\left(= \dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ 의 부호가 어떤 구간에서 증감을 나타낸거라면

순간변화율$\left(= \text{도함수} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} = f'(x)\right)$의 부호도 순간 순간 증감을 나타내는 거야

물론 도함수는 임의의 점에서의 미분계수이므로 x값의 범위에 따라 구간의 증감을 나타내기도 하지

구간 $[a, b]$에서 $f'(x) > 0 \;\; \dfrac{\Rightarrow (\bigcirc)}{\Leftarrow (\times)} \;\; f(x)$는 증가 $f'(x) \geq 0 \;\; \dfrac{\Rightarrow (\times)}{\Leftarrow (\bigcirc)} \;\; f(x)$는 증가

$\therefore$ 문제에서 "증가" 라는 말이 나오면 무조건 $f'(x) \geq 0$ 인거야

도함수 부호는 x값의 범위에 따라 구간에서의 증감을 나타내지만
미분계수는 특정한 점에서 값이므로 미분계수의 부호는
특정한 점에서의 증감을 나타내

이때 표현의 차이가 있는데 구간에서는 증가, 감소 라는 표현을 하지만
특정한 어느 한 점에서는 ≪증가상태≫ ≪감소 상태≫라는 표현을 써
표현 방법이 다른거지 의미는 같아

임의의 작은 양의 실수 h에 대하여 $x = a$라는 점에서 $f'(a) > 0 \Rightarrow f(x)$는 $x = a$에서 증가상태 $\Leftrightarrow f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ $f'(a) < 0 \Rightarrow f(x)$는 $x = a$에서 감소상태 $\Leftrightarrow f(a-h) > f(a) > f(a+h)$

(3) 증감을 나타내는 식 정리

$\Rightarrow$ 예전에 배웠던 것까지 총정리 하자

① 증가

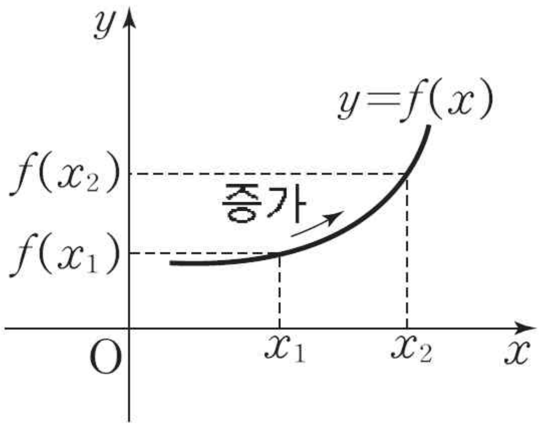
$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

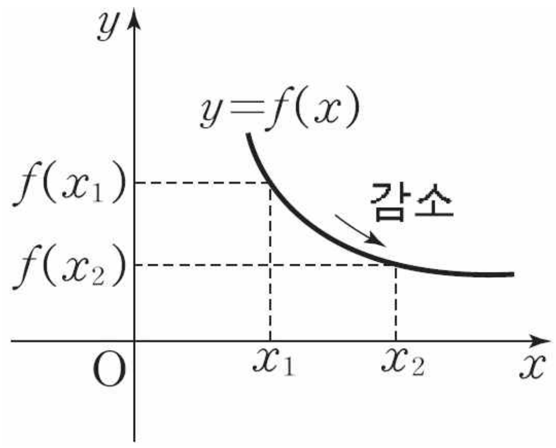
$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$

②감소

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)(f(x_2) - f(x_1)) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$





≪ 함수의 증감에 대한 몇가지 상식 ≫

$$
\begin{aligned}
f(x)\text{가 증가} &\Rightarrow f^{-1}(x)\text{ 증가} \\
&\Rightarrow f \circ f(x)\text{ 증가} \\
&\Rightarrow -f(-x)\text{ 증가} \\
&\Rightarrow kf(x)\text{ 증가 (단 } k > 0)
\end{aligned}
$$

f 증가, g 증가 $\Rightarrow f \circ g$ 증가, $g \circ f$ 증가

f 감소, g 감소 $\Rightarrow f \circ g$ 증가, $g \circ f$ 증가

f 증가, g 감소 $\Rightarrow f \circ g$ 감소, $g \circ f$ 감소

f 감소, g 증가 $\Rightarrow f \circ g$ 감소, $g \circ f$ 감소

증가 $+$ 증가 $\Rightarrow$ 증가 (○)

증가 $-$ 증가 $\Rightarrow$ 증가 (×) ($\because x^3-(2x^3)=-x^3$)

증가 $\times$ 증가 $\Rightarrow$ 증가 (×) ($\because x^3 \times x^3 = x^6$)

2. 함수의 극대 극소

$\Rightarrow$ $f(x)$가 $x=a$ 에서 연속이고 $x=a$ 좌우에서 $f(x)$가

① 증가 상태에서 감소상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 ≪ 극대 ≫ 라고 하고 이때, 함숫값 $f(a)$를 ≪ 극댓값 ≫ 이라고 해
($f'(x)$ 입장에서 보면 $f'(a)$ 를 기준으로 $+$ 에서 $-$로 바뀌지)

(또다른 표현)

$a-h < x < a$ 이면 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$,

$a < x < a+h$ 이면 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$

이면 $f(x)$는 $x=a$ 에서 극대

$cf.)$ $f'(a)=0$ 이면서 $f''(a)<0$ (위로볼록)이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대

② 감소상태에서 증가상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 ≪ 극소 ≫ 라고 하고 이 때, 함숫값 $f(a)$를 ≪ 극솟값 ≫ 이라고 해
($f'(x)$ 입장에서 보면 $f'(a)$ 를 기준으로 $-$ 에서 $+$로 바뀌지)

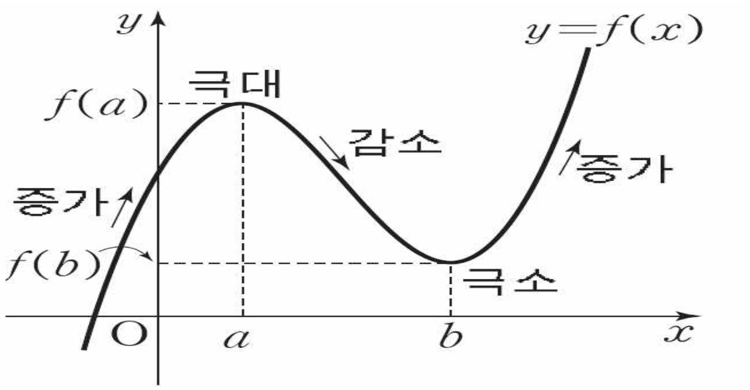
(또다른 표현)

$a-h < x < a$ 이면 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < 0$,

$a < x < a+h$ 이면 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$

이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소

$cf.)$ $f'(a)=0$ 이면서 $f''(a)>0$ (아래로볼록)이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소



≪ 극값이 존재여부는 미분가능성과 전혀 관계없다 ≫

극댓값, 극솟값(극점)을 찾을 때 일반적으로 $f'(x)=0$이 되는 x값을 찾지?
근데 사실 개념적으론 $f'(x)=0$인거랑 극점이랑은 전혀 상관이 없어

극점은 함수 $f(x)$가 연속이고 증감이 변하기만 하면 되거던
미분 불가능(뾰족점) 에서도 극점은 생길 수가 있어

단, 미분가능한 함수(다항식..) 한테는 극점일때 미분계수가 0이 되지
그래서 일반적으로 미분이 가능한 함수의 극점을 구할 때
$f'(x)=0$ 이 되는 점을 찾는 것 뿐이야

또 미분 불가능이라는 말은 $f'(x)$ 그래프입장에서 보면 불연속이거던
그니깐 극점은 $f'(x)$입장에서 보면 불연속이어도 +, − 만 변하면
$f(x)$ 한테는 극점이 되는거야

미분가능성과 극값의 존재여부를 따지는 것에 기본 전제 조건은
함수가 연속이 되야 돼 밑에 관계도를 함 이해해봐ㅎ

≪ $f(x)$의 극한 ≫ $\dfrac{\Rightarrow(\times)}{\Leftarrow(\bigcirc)}$ ≪ $f(x)$의 연속성 ≫ $\dfrac{\Rightarrow(\times)}{\Leftarrow(\bigcirc)}$

$\lim_{x\to a^{+0}} f(x) = \lim_{x\to a^{-0}} f(x)$ $\lim_{x\to a^{+0}} f(x) = \lim_{x\to a^{-0}} f(x) = f(a)$

≪ $f(x)$의 미분가능 ≫ : $\lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

≪ $f(x)$의 극값의존재 ≫ : $f(x)$의 증감변화 // $f'(x)$의 부호변화

$cf.)$ 극한값의 존재여부(지방대), 연속성 여부(서울대),
미분 가능성 여부 (하버드대), 극값 존재여부(예일대) 로 생각하면 이해가 빨라

하버드대를 갈 실력이면 서울대나 지방대는 가겠지
하지만 예일대 간다는 보장은 없자나

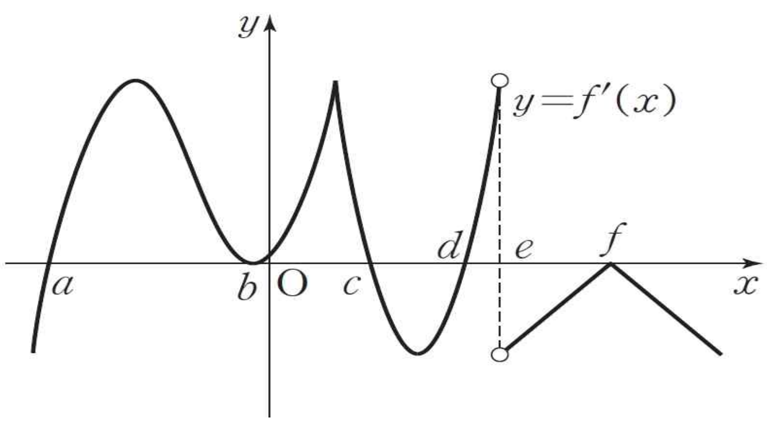
마찬가지로 예일대 갈 실력이면 서울대나 지방대는 갈 수 있어도 하버드대 간다는 보장은 없지?

그 것 처럼 극값의 존재여부와 그 점에서의 미분가능성은 전혀 관계가 없어

참고로 극한값의 존재여부, 연속성, 미분가능성, 극값 이 모든 얘기는 $x=a$ 라는 한 점에 대한 얘기야
점이라는 곳에서 이론이 진행된다고 보면돼

$cf.)$ $x=a$에서 극대 • 극소 $\dfrac{\not\Rightarrow(\text{뾰족점})}{\not\Leftarrow(\text{변곡점})}$ $f'(a)=0$

$ex)$ 다음 그래프에서 극점의 개수를 구하시오



$\Rightarrow$ $f'(x)$ 그래프지?? 연속이던 불연속이던 상관없네
무조건 +, − 변하는 점이 극점이야!!!
답: $(a, f(a))$, $(c, f(c))$, $(d, f(d))$, $(e, f(e))$ 4개

안녕맨의 끝장인강

3. 선대칭, 점대칭, 주기함수의 미분

$\Rightarrow$ 선대칭을 미분하면 점대칭이 되고 점대칭을미분하면 선대칭이 돼
주기함수 미분하면 여전히 주기함수 되고

이 정도만 암기하고 우선 선대칭($x=a$), 점대칭(a, b), 주기 함수
에 대한 식을 한번 공부해보자

(1) 선대칭 ($x=a$ 에 대칭)(괄호안에 x부호 반대, 함수값 부호 동일)

① $f(a+x) = f(a-x)$ ② $f(x) = f(2a-x)$

③ $F(x) = f(x) + f(2a-x)$

$\Rightarrow F(2a-x) = f(2a-x) + f(x) = F(x)$, $F(x)$: $x=a$에 대칭

$ex)$ $F(x) = 2^x + 2^{4-x}$: $x=2$에 대칭

④ $x=a$ 에서 미분가능하면($=f'(a)$가 존재하면) $f'(a)=0$이된다

(참고로 $x=a$에서 미분가능하다는 말이 없으면 안됨 뾰족점도
대칭함수이기 때문에 미분이 불가능할수있어)

(2) 우함수 ($x=0$ 에 대칭) ($a=0$일때)

① $f(x) = f(-x)$

② $F(x) = f(x) + f(-x) \Rightarrow F(-x) = F(x)$, $F(x)$: 우함수

ex) $F(x) = 2^{x} + 2^{-x}$

③ $x=0$ 에서 미분가능하면(= $f'(0)$이 존재하면) $f'(0) = 0$ 이다

$\Rightarrow$ 마찬가지로 $x=0$에서 뾰족점으로 대칭될수도 있기 때문에
$f'(0)$이 존재한다는 말이 있어야 $f'(0) = 0$이라고 할수있어)

(3) 점 $(a,\ b)$에 대한 대칭 (괄호안에 x부호 반대, 함수값 부호 반대)

① $f(a+x) + f(a-x) = 2b$

② $f(x) + f(2a-x) = 2b$

③ 서로다른 두 실수 x_1, x_2 에 대하여
$x_1 + x_2 = 2a$ 일 때, $f(x_1) + f(x_2) = 2b$

④ $G(x) = f(x) - f(2a-x)$

$\Rightarrow G(2a-x) = f(2a-x) - f(x) = -G(x)$

$\therefore G(2a-x) + G(x) = 0$, $G(x)$: $(a, 0)$에 대칭

ex) $G(x) = 2^{x} - 2^{4-x}$: 점 $(2, 0)$에 대칭

⑤ $f(x)$가 $x=a$에서 연속이면 $(a,\ b)$를 지난다 ($f(a)=b$ 만족)

(4) 기함수 ($(0,\ 0)$원점에 대한 대칭) ($a=0,\ b=0$일때)

① $f(-x) = -f(x)$

② $G(x) = f(x) - f(-x) \Rightarrow G(-x) = -G(x),\quad G(x)$: 기함수

$ex)\quad G(x) = 2^x - 2^{-x}$

③$f(x)$가 $x=0$에서 연속이면 원점 $(0,\ 0)$ 지난다

(5) 우함수 와 기함수의 연산 결과 (③, ⑤번 중요)

① (우) ± (우) = (우) : $(x^2+2)+(x^4)=x^4+x^2+2$ (우)

② (우) × ÷ (우) = (우) : $x^4 \div x^2 = x^2$ (우)

③ (기) × ÷ (기) = (우) : $x^3 \times x^5 = x^8$ (우)

④ (기) ± (기) = (기) : x^3+2x (기)

⑤ (기) × ÷ (우) = (기) : $x^3 \times x^2 = x^5$(기)

(6) 주기 함수 (괄호안의 x 부호 동일)

① $f(x) = f(x+p)$: 주기 p $(x+p-x=p)$

② $f(x) = -f(x+p)$: 주기 $2p$ $(2(x+p-x)=2p)$

③ $x=a$ 대칭이고 $x=b$에도 대칭 : 주기 $2|a-b|$

④ $x=a$ 대칭이고 점 $(b,\ c)$에 도 대칭 : 주기 $4|a-b|$

$ex)$ ①$f(x-3)=f(x+2)$ 차이가 5이므로 주기 : 5

②$f(x+2) = -f(x-3)$: 차이 5인데 부호반대이므로 주기 : 10

③ $f(3+x)=(3-x)$, $f(x)=f(4-x)$: $x=3$ 에 대칭, $x=2$에 대칭

$\Rightarrow$ 주기 $2(3-2)=2$

④ $f(6-x)=f(x)$, $f(1-x)+f(1+x)=10$

$\Rightarrow x=3$에 대칭 점 $(1, 5)$에 대칭 : 주기 $4(3-1)=8$

(6) 대칭함수의　지수함수와 로그함수와의 합성함수

① $f(x)$가 $x=a$에 대칭 $\begin{cases} 2^{f(x)} \\ \log f(x) \end{cases}$ 는 $x=a$에 대칭(○)

$\Rightarrow g(x)=2^{f(x)}$ 에서

$g(2a-x)=2^{f(2a-x)}=2^{f(x)}=g(x)$

② $f(x)$가 점 $(a,\ b)$에 대칭 $\begin{cases} 2^{f(x)} \\ \log f(x) \end{cases}$ 는 점 (a, b)에 대칭($\times$)

$\Rightarrow g(x)=2^{f(x)}$ 에서

$g(2a-x)=2^{f(2a-x)}$

$g(x)+g(2a-x)=2^{f(x)}+2^{f(2a-x)}\neq 2b$

안녕맨의 끝장인강

(7) 선대칭, 점대칭, 주기함수의 미분

① $x = a$ 에 대칭 (선대칭) 미분 $\Rightarrow$ 점$(a,\ 0)$대칭

$\Rightarrow f(a+x) = f(a-x)$ 에서 양변을 미분하면

$f'(a+x) = -f'(a-x)$: 점 $(a,\ 0)$대칭

$f'(x)$가 $x=a$에서 연속이라면($f'(a)$가존재한다면) $f'(a)=0$

② $x=0$ (y축) 대칭 (우함수) 미분 $\Rightarrow$ $(0,\ 0)$(원점)대칭(기함수)

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$ 에서 양변을 미분하면

$-f'(-x) = f'(x)$ (기 함수)

$f'(x)$가 $x=0$에서 연속일때($f'(0)$이존재할때) $f'(0)=0$이다

③ 점 $(a,\ \ b)$ 대칭 미분 $\Rightarrow x = a$ 에 대칭(선대칭)

$\Rightarrow f(a+x) + f(a-x) = 2b$ 에서 양변을 미분하면

$f'(a+x) - f'(a-x) = 0,\ \Rightarrow f'(a+x) = f'(a-x)$ $(x = a$ 대칭$)$

④ 점 $(0, 0)$ (원점) 대칭 (기함수) 미분 $\Rightarrow x = 0$ (y축) 대칭 (우함수)

$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ 에서 양변을 미분하면

$-f'(-x) = -f'(x),\ \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$ (우함수)

⑤ 주기 함수는 미분해도 그대로 같은주기의 함수다

$\Rightarrow f(x) = f(x+p)$ 에서 양변 미분하면 $f'(x) = f'(x+p)$ (변함없음)

$f(x) = -f(x+p)$ 에서 양변 미분하면 $f'(x) =- f'(x+p)$ (변함없음)

(8) 함수 만들기

$\Rightarrow$ 함수값이나 미분계수를 가지고 $f(x)$를 어느정도추론할수가 있는데 실전에서 자주 사용하는 거니깐 잘 익혀둬ㅎ

$\ll$ 함수값으로 $f(x)$ 추론하기 $\gg$

① $f(1) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-1)Q(x)$

② $f(1) = 3 \Rightarrow f(x) = (x-1)Q(x) + 3$

③ $f(1) = 0,\ f(3) = 0 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3)Q(x)$

④ $f(1) = 4,\ f(3) = 4 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3)Q(x) + 4$

⑤ $f(1) = 1,\ f(3) = 3 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-3)Q(x) + x$

⑥ $f(1) = 2,\ f(2) = 4,\ f(3) = 6 \Rightarrow f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + 2x$

$\Rightarrow$ 이건 $a_1 = 2,\ a_2 = 4,\ a_3 = 6$ 인 등차수열 일반항이 $a_n = 2n$ 이지 그걸 $2x$로 붙힌거야 하나의 팁으로 알아 둬

예를들어 $f(2) = 5,\ f(4) = 11$ 이라고 하면
$a_2 = 5,\ a_4 = 11$ 인 등차수열 일반항 생각해봐
$a_4 - a_2 = 2d = 6,\quad d = 3,\quad a_n = 3n - 1$
그래서 $f(x) = (x-2)(x-4)Q(x) + 3x - 1$ 이라고 둘 수 있어

⑦ $f(1) = 3,\ f(2) = 9,\ f(3) = 27$

$\Rightarrow$ 이건 등비수열이지? 일반항이 3^x 이니깐

$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x) + 3^x$ 이렇게 둘 수 있지

즉 $f(\alpha) = a,\ f(\beta) = b,\ ..$일 때

$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)..Q(x) + (\text{수열의일반항})$ 으로 나타 낼 수 있어

≪ 미분계수에서 $f(x)$ 식 추론하기 ≫

$\Rightarrow$ 만일 $f'(\alpha)=0$ 이다 이게 뭔말일까?

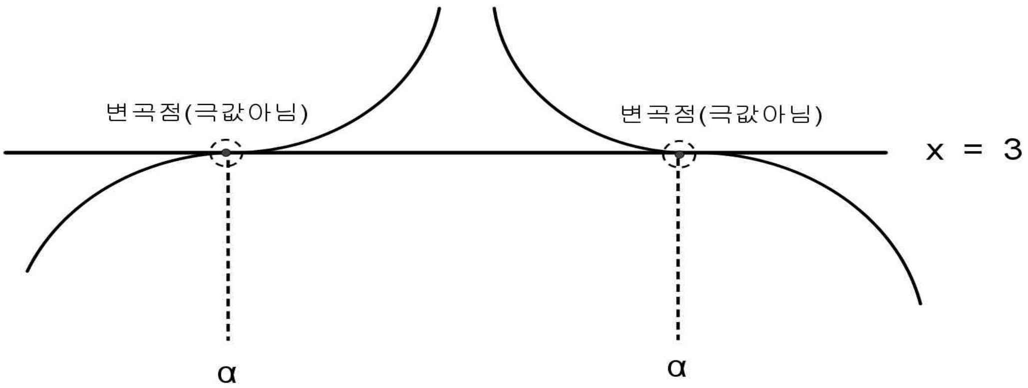
얼핏 생각하면 아마 이건 $x=\alpha$ 에서 극값을 갖는다 생각할거야

근데 미분계수가 0 이라고 극값 갖는다는 건 말도 안되는 얘기야

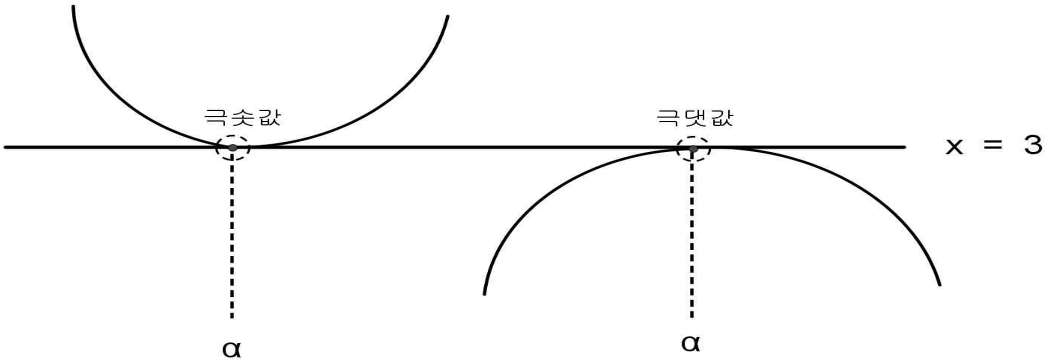
즉, 극값의 조건은 미분계수가 0 이랑 관련이 없어
함수의 증감이 변해야 하고 그 점에서 미분계수 부호가 변해야 해

$f'(\alpha)=0$ 일때의 그래프를 보면 총 4가지 경우가 생겨

이 실제로 식으로 나타 낼때는 2가지로 나뉘는데 그림을
보면서 이해를 해보자
밑의 그림은 $f'(\alpha)=0$, $f(\alpha)=3$ 일 때의 4가지 경우를 나타낸거야



$f'(\alpha)=0, \quad f''(\alpha)=0 \quad \Rightarrow \quad f(x)=(x-\alpha)^3Q(x)+3$



$f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)>0$ $\qquad$ $f'(\alpha)=0,\ f''(\alpha)<0$

$\Rightarrow\ f(x)=(x-\alpha)^2Q(x)+3$

$\Rightarrow$ 여기서 보면 $f'(\alpha)=0$ 이라고 하면 $f''(\alpha)$ 값에 따라
$(x-\alpha)^2Q(x)$ 으로 나타 낼 수 도 있고
$(x-\alpha)^3Q(x)$ 으로도 나타 낼 수 있는데

$f''(\alpha)$ 값을 모를 때는 $(x-\alpha)^2Q(x)$ 쓰는 게 맞아

$(x-\alpha)^2Q(x)$ 안에는 포괄적으로 $(x-\alpha)^3Q(x)$ 을 포함하는 거니깐

다음 예를 통해서 잘 익혀봐 (문이과 따로 예를 들었어)

$ex)$ $f'(3)=0,\ f(3)=0 \quad \Rightarrow\ f(x)=(x-3)^2Q(x)$

$f'(3)=0,\ f(3)=2 \quad \Rightarrow f(x)=(x-3)^2Q(x)+2$

$cf.)$ 두 식 다 $f(3)$이 극값인지 알수 없다 (3에서 증감변화를 모르므로)

ex(이과전용) $f'(3)=0,\ f''(3)=0,\ f(3)=0\ \Rightarrow f(x)=(x-3)^3Q(x)$

$f'(3)=0,\ f''(3)=0,\ f(3)=2\ \Rightarrow f(x)=(x-3)^3Q(x)+2$

$\Rightarrow x=3$에서 변곡점 (극값은 아님) 위의그림참조

ex(이과전용) $f'(3)=0,\ f''(3)>0,\ f(3)=2\ \Rightarrow f(x)=(x-3)^2Q(x)+2$

$\Rightarrow\ x=3$에서 극소가 되고 극솟값은 $f(3)=2$ (위의 그림참조)

$f'(3)=0,\ f''(3)<0,\ f(3)=2\ \Rightarrow f(x)=(x-3)^2Q(x)+2$

$\Rightarrow\ x=3$에서 극대가 되고 극댓값은 $f(3)=2$ (위의 그림참조)